

# Wavelets

Andreas de Vries

*FH Südwestfalen University of Applied Sciences, Haldener Straße 182, D-58095 Hagen, Germany*

e-Mail: de-vries.andreas@fh-swf.de

Version: 18. Juni 2009; ergänzt am 1. März 2021

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Daubechies-Wavelets</b>	<b>2</b>
2.1	Dyadische Zahlen . . . . .	7
2.2	Eigenschaften der Daubechies-Skalierungsfunktionen . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Die schnelle Daubechies-Wavelet-Transformation</b>	<b>10</b>
3.1	Die schnelle inverse Daubechies-Wavelet-Transformation . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Allgemeiner Zugang zu Wavelets</b>	<b>15</b>
4.1	Die Fouriertransformation . . . . .	15
4.2	Grundlegende Eigenschaften von Wavelets . . . . .	16
4.2.1	Wavelets und Bandpassfilter . . . . .	18
4.3	Orthonormale Waveletpakete . . . . .	20
4.4	Biorthogonale Wavelets . . . . .	21
4.4.1	Der eindimensionale Fall . . . . .	22
4.4.2	Der zweidimensionale Fall . . . . .	26
4.5	Malvar-Wilson-Wavelets . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Die Wavelet-Transformation</b>	<b>29</b>
5.1	Der Bildraum einer Wavelet-Transformation . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Sweldens' Liftungsschema</b>	<b>32</b>
<b>7</b>	<b>Chirplets und die Wavelet-Transformation</b>	<b>33</b>
<b>8</b>	<b>Sehen</b>	<b>34</b>
8.1	Marrs Programm . . . . .	35
8.2	Kantenerkennung durch Nulldurchgänge . . . . .	36
8.3	Mallats Algorithmus . . . . .	38
8.3.1	Mallats Algorithmus in zwei Dimensionen . . . . .	39

## 1 Einleitung

Waveletmethoden bilden die Grundlage eines neuen Verständnisses der Zeit-Frequenz-Analyse. Sie entstanden und existierten zunächst unabhängig voneinander in ganz verschiedenen Wissenschaftszweigen, bis sie unter den Begriffen „Wavelets“ und „Zeit-Skalen-Analyse“, oder „Raum-Skalen-Analyse“ im Zusammenhang mit Bildverarbeitung, zusammengefasst wurden.

Die Theorie der Wavelets ist eng verknüpft mit der Fouriertransformation. Umgekehrt ist die kontinuierliche Wavelet-Transformation eine Integraltransformation wie die Fouriertransformation. Doch während die Fouriertransformation die *globale* Regularität einer Funktion analysiert, analysiert die Wavelet-Transformierte die *punktweise* Regularität einer Funktion.<sup>1</sup> Die Wavelet-Theorie umfasst die Darstellung allgemeiner Funktionen durch Terme einfacherer, fester Bausteine in unterschiedlichen Skalen und an unterschiedlichen Stellen.

Die vorliegende Ausarbeitung gibt eine kurze Einführung in die Theorie der Wavelets und einige ihrer Anwendungen. Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut. Zunächst wird die wichtige Klasse der Daubechies-Wavelets betrachtet. Sie wurden Ende der 1980er Jahre von Ingrid Daubechies entwickelt und stellen eine neuartige Klasse von Funktionen dar. Sie werden in Anwendungen oft verwendet. Danach wird auf die schnelle Daubechies-Transformation eingegangen, eine spezielle diskrete Wavelet-Transformation, die auf den Daubechies-Wavelets aufbaut. Mit Kenntnis dieser konkreten Beispiele wird dann der Zugang zu allgemeinen Wavelets und der Wavelet-Transformation dargestellt, bevor mit Sweldens Liftung eine Methode zur Berechnung der diskreten Wavelet-Transformation ohne explizite Kenntnis der zu Grunde liegenden Wavelets vorgestellt und auf Anwendungsbeispiele der Wavelets bei den verwandten Chirplets und bei der Theorie des menschlichen Sehvorgangs eingegangen wird.

## 2 Daubechies-Wavelets

**Definition 2.1** Für  $N \in \mathbb{N}$  ist ein *Daubechies-Wavelet* der Klasse  $D-2N$  als eine Funktion  $\psi = {}_N\psi \in L^2(\mathbb{R})$ ,

$$\psi(x) := \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2N-1} (-1)^k h_{2N-1-k} \varphi(2x - k), \quad (1)$$

definiert, wobei die *Filterkoeffizienten*  $h_0, \dots, h_{2N-1} \in \mathbb{R}$  den Bedingungen

$$\sum_{k=0}^{N-1} h_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sum_{k=0}^{N-1} h_{2k+1}, \quad (2)$$

sowie

$$\sum_{k=2l}^{2N-1+2l} h_k h_{k-2l} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } l = 0, \\ 0 & \text{wenn } l \neq 0, \end{cases} \quad (3)$$

<sup>1</sup>[http://cas.ensmp.fr/~chaplais/Wavetour\\_presentation/Regularite/Regularity.html](http://cas.ensmp.fr/~chaplais/Wavetour_presentation/Regularite/Regularity.html)

für  $l = 0, 1, \dots, N - 1$  genügen, und wobei  $\varphi = {}_N\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die (*Daubechies-*) *Skalierungsfunktion* („*Scalet*“, „*Vater-Wavelet*“) durch die Rekursionsgleichung

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \varphi(2x - k) \tag{4}$$

gegeben ist und den Beziehungen

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus [0, 2N - 1[. \tag{5}$$

sowie

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(2x - k) \varphi(2x - l) dx = 0 \quad \text{für } k \neq l. \tag{6}$$

unterliegt. Vgl. [2, 3]. □

Das erste grundlegende Problem bei der Konstruktion von Daubechies-Wavelets ist die Bestimmung von Filterkoeffizienten  $h_0, \dots, h_{2N-1}$ , so dass sie eine nichtverschwindende Skalierungsfunktion  $\varphi$  gemäß (4) ermöglichen. Die Koeffizienten genügen  $N$  Gleichungen durch die Orthonormalitätsbedingungen (3). Zusammen mit (2) ergibt dies insgesamt  $N + 2$  Gleichungen für die  $2N$  Filterkoeffizienten  $h_k$ . Somit sind sie für  $N = 1$  überbestimmt, für  $N = 2$  eindeutig (falls sie existieren), und für  $N > 2$  unterbestimmt. Sind die Filterkoeffizienten jedoch einmal gegeben, so zeigt ein eleganter Beweis [8, Cor. 8.9] mit Hilfe der Fouriertransformation des entsprechenden Rekursionsoperators<sup>2</sup> die Existenz und Eindeutigkeit einer Funktion  $\varphi$ , die (4) und der Normalisierungsbedingung  $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$  genügt.

Üblicherweise geht man jedoch genau andersherum vor: zuerst wird die Skalierungsfunktion  $\varphi$  definiert, und davon werden die Filterkoeffizienten hergeleitet. Diese allgemeine Vorgehensweise wird in Abschnitt 4.2 ausgeführt, siehe Gl. (61).

**Beispiel 2.2** (*D2-Wavelet, oder Haar-Wavelet*) Seien  $N = 1$  und  $h_0 = 1/\sqrt{2}$ ,  $h_1 = 1/\sqrt{2}$ . Dann bestimmen die Anfangswerte  $\varphi(0) = 1$ ,  $\varphi(k) = 0$  für  $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ , die Skalierungsfunktion eindeutig. Gl. (4) lautet dann einfach  $\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x - 1)$ , d.h.

$$\begin{array}{c|cccccccccc} x & \cdots & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 & \frac{5}{4} & \cdots \\ \hline \varphi(x) & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \end{array} \tag{7}$$

Gl. (1) lautet  $\psi(x) = -\varphi(2x - 1) + \varphi(2x)$ , also

$$\begin{array}{c|cccccccccc} x & \cdots & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 & \frac{5}{4} & \cdots \\ \hline \psi(x) & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots \end{array} \tag{8}$$

---

<sup>2</sup>Definiere für eine gegebene Folge  $h_0, \dots, h_{2N-1}$  den linearen Operator  $T : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$  auf dem Funktionenraum  $\mathfrak{F} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$  durch

$$(Tf)(x) = \sum_{k=0}^{2N-1} h_k f(2x - k).$$

Dann bedeutet die Rekursion (4) für eine Funktion  $\varphi$ , dass  $\varphi = T\varphi$ , d.h. eine Skalierungsfunktion ist ein Fixpunkt von  $T$ , also eine Eigenfunktion zum Eigenwert 1.

Tatsächlich sind  $\varphi$  und  $\psi$  also die Stufenfunktionen

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (9)$$

□

**Beispiel 2.3** (*D4 wavelet*) Seien  $n = 1$ ,  $N = 2$  und

$$h_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}. \quad (10)$$

Dann bestimmen die Anfangswerte

$$\varphi(1) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \quad \varphi(2) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \quad \varphi(k) = 0 \quad \text{für } k \in \mathbb{Z} \setminus \{1, 2\}, \quad (11)$$

die Skalierungsfunktion eindeutig. Gl. (4) ergibt dann  $\varphi(x) = \sqrt{2} [h_0 \varphi(2x) + h_1 \varphi(2x - 1) + h_2 \varphi(2x - 2) + h_3 \varphi(2x - 3)]$ , d.h.

$x$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{4}$	3
$\varphi(x)$	0	$\frac{5+3\sqrt{3}}{16}$	$\frac{2+\sqrt{3}}{4}$	$\frac{9+5\sqrt{3}}{16}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{8}$	0	$\frac{1-\sqrt{3}}{8}$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{9-5\sqrt{3}}{16}$	$\frac{2-\sqrt{3}}{4}$	$\frac{5-3\sqrt{3}}{16}$	0

Gl. (1) lautet nun

$$\psi(1) = \sqrt{2} [h_3 \varphi(2) - h_2 \varphi(1) + h_1 \varphi(0) - h_0 \varphi(-1)] = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \quad (12)$$

und entsprechend ergeben sich die anderen Werte zu

$x$	...	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	...
$\psi(x)$	...	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	...

□

**Beispiel 2.4** (*Wavelet vom Rang 2 und Genus 2*) [10, Ex. 4.3] Seien  $n = 1$ ,  $N = 2$ , und definieren wir eine einparametrische Familie von Filterkoeffizienten

$$h_0(\theta) = \frac{1 + \sqrt{2} \cos(\theta + \frac{\pi}{4})}{2\sqrt{2}}, \quad h_1(\theta) = \frac{1 + \sqrt{2} \cos(\theta - \frac{\pi}{4})}{2\sqrt{2}},$$

$$h_2(\theta) = \frac{1 - \sqrt{2} \cos(\theta + \frac{\pi}{4})}{2\sqrt{2}}, \quad h_3(\theta) = \frac{1 - \sqrt{2} \cos(\theta - \frac{\pi}{4})}{2\sqrt{2}}, \quad (14)$$

wo  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Speziell für  $\theta = \frac{\pi}{6}$  ergeben diese Koeffizienten die Wavelets der Daubechies-Klasse D4 aus Beispiel 2.3. □

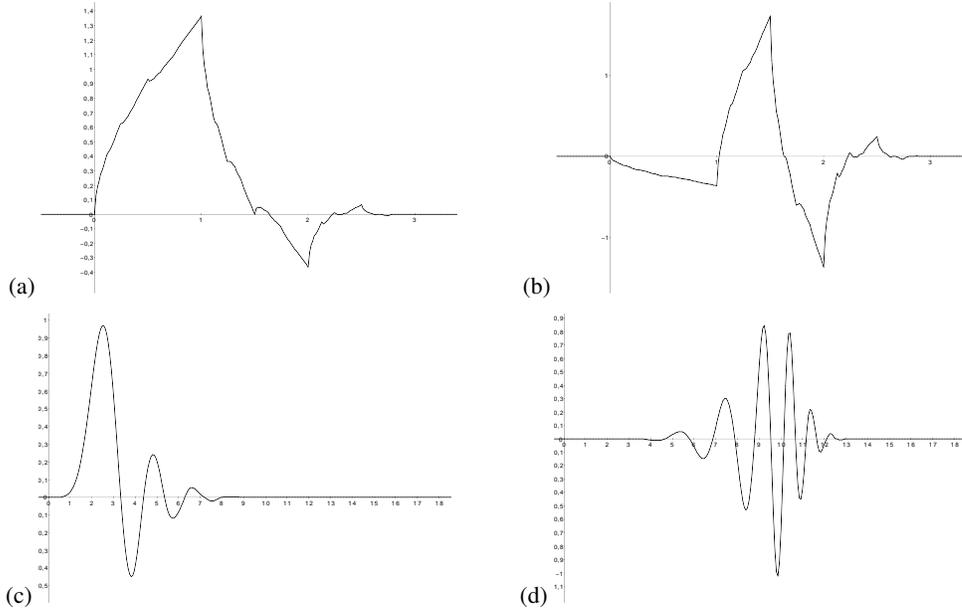


Abbildung 1: (a) Skalierungsfunktion  $\varphi$  der Daubechies-Klasse D4, (b) Wavelet  $\psi$  der Daubechies-Klasse D4; (c) Skalierungsfunktion  $\varphi$  der Daubechies-Klasse D20; (d) Wavelet  $\psi$  der Daubechies-Klasse D20.

Die orthogonalen Wavelets der Daubechies-Klassen D2 – D20 (nur gerade Indizes) sind die meistverwendeten Wavelets. Die Indexnummer bezeichnet hierbei die Anzahl  $2N$  der Koeffizienten. Jede Wavelet hat eine bestimmte Anzahl verschwindender Momente, nämlich die Hälfte der Koeffizientenanzahl  $2N$ :

$$\int_{\mathbb{R}} x^j \varphi_N(x) dx = 0 \quad \text{für } j = 0, \dots, N. \quad (15)$$

Beipielsweise hat das Haar-Wavelet  $\psi$  der Klasse D2 ein verschwindendes Moment, eines der Klasse D4 hat zwei verschwindende Momente, usw. Verschwindende Momente bestimmen die Fähigkeit des Wavelets, polynomiales Verhalten oder polynomiale Komponenten eines Signals darzustellen. Das D2-Wavelet z.B. kann Polynome mit einem Koeffizienten, also konstante Signalkomponenten perfekt darstellen, das D4-Wavelet mit zwei verschwindenden Momenten kann Polynome mit zwei Koeffizienten darstellen, also konstante und lineare Signalkomponenten, D6 konstante, lineare und quadratische Signalkomponenten. Eine hohe Anzahl verschwindender Momente führt zu einer hohen Kompressibilität, da die Koeffizienten eines feinskalierten Wavelets nahezu null sind an Stellen, wo die Signalfunktion glatt ist [3, §7.4].

Die Regularität eines Daubechies-Wavelets wird mit dem „Hölder-Exponenten“  $\alpha$  gemessen und ist proportional zu seinem Grad  $N$ , nämlich  $\alpha = \mu_N N$  mit einem durch  $\mu_N > 0.2$  begrenzten Proportionalitätsfaktor [3, §7.1.2]. Insbesondere ist  $\alpha > 1$  für  $N \geq 3$ , d.h.  $\varphi_N, \psi_N$  sind stetig differenzierbar für  $N \geq 3$  [3, pp. 226,239]. Im allgemeinen ist bei fester Trägerbreite von  $\varphi$  and  $\psi$ , oder äquivalent bei fester Anzahl nichtverschwindender Filterkoeffizienten, die Wahl optimaler  $h_k$  zur maximalen Regularität verschieden von derjenigen zur maximalen Anzahl verschwindender Momente des Wavelets  $\psi$ .

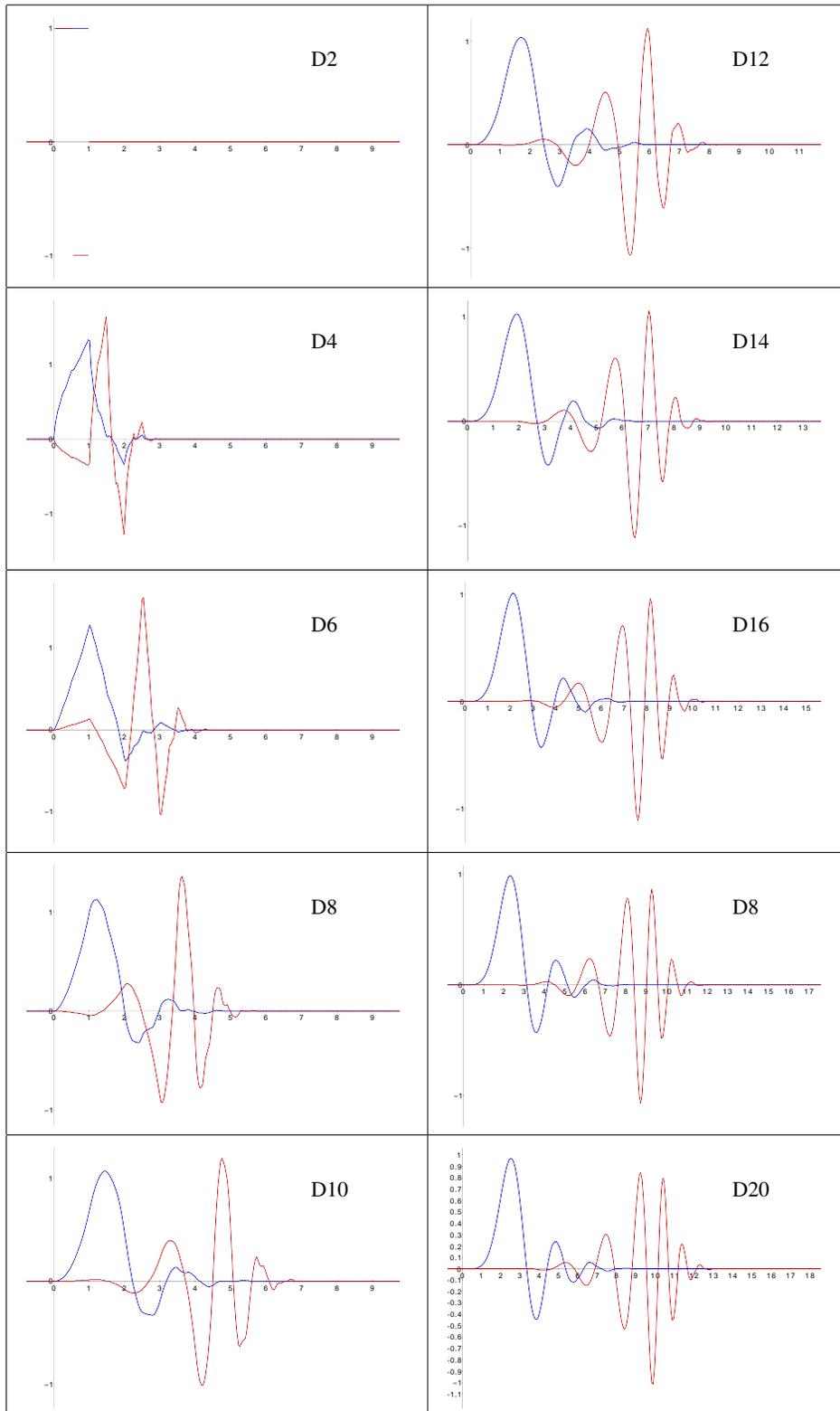


Abbildung 2: Die Skalierungsfunktionen  $N\varphi$  (blau) und die entsprechenden Wavelets  $N\psi$  (rot) der Daubechies-Klasse  $D(2N)$ , für  $N = 1, 2, \dots, 10$ .

In Tabelle 1 sind die Filterkoeffizienten der Daubechies-Klassen D2–20 aufgelistet. Die Wavelet-Koeffizienten  $g_k$  mit  $\psi(x) = \sqrt{2} \sum_k g_k \varphi(2x - k)$  ergeben sich aus den  $h_k$

D2	D4	D6	D8	D10	D12	D14	D16	D18	D20
0.7071067811865475	0.482962911445341	0.312505529508825	0.201077813388984	0.1601025979741929	0.115407435301099	0.0778520540830017	0.0544158122411072	0.0380772473688778	0.02567059060473
0.7071067811865475	0.836516303778077	0.8068915091110924	0.7148465705529155	0.6038252697971895	0.4946238903984533	0.3963593194818912	0.3128715969143166	0.243834674612588	0.1881768000776347
	0.2541438680420134	0.4598775021184914	0.630880767998587	0.724308528437726	0.751133980210959	0.7291320908461957	0.6756307362973198	0.6048231236900955	0.5272011889315757
	-0.129409522512603	-0.1350110300102516	-0.0278837694168599	0.1384281459012303	0.3152503517091982	0.46978232874051889	0.585354881654216	0.6572880780312736	0.6884503914333637
		-0.0854112738820267	-0.1870348117190931	-0.242948879663823	-0.22636469398544	-0.14906003928512	-0.0158291052363823	0.131197388249883	0.281172346669715
		0.03523262918857095	0.0308413818355607	-0.0323448695846381	-0.1297668675672625	-0.2340161849938412	-0.2840155429615824	-0.2932737833791603	-0.2498464243271598
		0.032830116668852	0.0775714938400459	0.0975016055873225	0.0713692192668272	4.723845739124E-4	-0.0968407832229492	-0.1994602743772862	
			-0.010597401785069	-0.0082414903127983	0.027522865303035	0.0806126091510774	0.128747236204893	0.1485407493381256	0.1273693403357541
				0.013880751999682	-0.031883783114862	-0.030209360830104	-0.01736930101809	0.0307256814783365	0.064057964035542
				0.0033357252854738	5.338422011614E-4	-0.0165745416306655	-0.0440882339507971	-0.0676328290613279	-0.0713941471665501
					0.0047772575109455	0.0125506983560686	0.0139810279174001	2.50947114834E-4	-0.029457536818399
					-0.0010775010853085	4.29579729214E-4	0.0087469404074065	0.0225616621269798	0.0353126740591612
						-0.0018016407040473	-0.00487035293452	-0.0047232047577518	0.003606553566987
						3.537139999745E-4	-3.91740373377E-4	-0.0042815036824635	-0.0107331754833007
							6.754494064506E-4	0.0018476468830563	0.0013953517470688
							-1.174767841248E-4	2.30385165323E-4	0.001992405391925
								-2.519831889427E-4	-6.858560949564E-4
								3.93474201163E-5	-1.164668551283E-4
									9.35886703202E-5
									-1.32683028944E-5

Tabelle 1: Normalisiert Filterkoeffizienten  $h_k$  der orthogonalen Daubechies D2N-  
Skalierungsfunktionen  $N\phi$ . Sie ergeben die Wavelets mit kompaktem Träger, die die höchste mit  
ihrer Trägerbreite verträgliche Anzahl verschwindender Momente. Die Werte stammen aus [3].

durch  $g_k = (-1)^k h_{2N+1-k}$ , vgl. (1).

Daubechies [2] bewies, dass die Skalierungsfunktionen  $N\phi$ , für  $N > 1$  durch keine algebraische Formel elementarer Funktionen dargestellt werden kann. Tatsächlich gehören sie einer neuen Klasse mathematischer Funktionen, neben Polynomen, trigonometrischen, exponentiellen und elliptischen Funktionen und den speziellen Standardfunktionen der Physik und Ingenieurwissenschaften.

Durch (4) sind die Daubechies Skalierungsfunktionen rekursiv definiert, beginnend mit Anfangswerten aus der Menge  $\mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen. Als nächstes werden die Funktionswerte der halbganzen Zahlen  $\frac{1}{2}n$  berechnet, die von den ganzzahligen Anfangswerten ableitbar sind. Danach werden die Funktionswerte für  $\frac{1}{4}n$  berechnet, dann  $\frac{1}{8}n$ , und so fort. Somit sind die Funktionswerte für Zahlen mit endlicher Binärentwicklung leicht berechenbar, die sogenannten „dyadischen“ Zahlen. Im Allgemeinen sind si jedoch für alle rationalen Werte berechenbar, vgl. [Abb].<sup>3</sup>

## 2.1 Dyadische Zahlen

**Definition 2.5** Eine Zahl  $x \in \mathbb{R}$  heißt *ganzzahlig dyadisch*, wenn sie ein ganzzahliges Vielfaches einer ganzzahligen Zweierpotenz ist. Die Menge aller dydischen Zahlen wird mit  $\mathbb{D}$  bezeichnet, also

$$\mathbb{D} = \{m \cdot 2^n : m, n \in \mathbb{Z}\}. \tag{16}$$

Für eine ganze Zahl  $n \in \mathbb{Z}$  heißt eine Zahl  $x \in \mathbb{R}$  *n-dyadisch*, wenn sie ein ganzzahliges Vielfaches von  $2^{-n}$  ist, und  $\mathbb{D}_n$  bezeichnet die Menge aller *n*-dyadischen Zahlen,

$$\mathbb{D}_n = \{m \cdot 2^{-n} : m \in \mathbb{Z}\}. \tag{17}$$

□

Im Allgemeinen gilt  $\mathbb{D}_n = 2^{-n}\mathbb{Z}$ , insbesondere  $\mathbb{D}_0 = \mathbb{Z}$ . Jede ganze Zahl ist also dyadisch. Was ist aber mit Brüchen?

<sup>3</sup>Dank an Paul Abbott für diesen Hinweis.

**Beispiele 2.6** (a) Die Zahl  $x = \frac{3}{8}$  ist dyadisch, da  $x = 3 \cdot 2^{-3}$ , d.h.  $\frac{3}{8} \in \mathbb{D}_3$ . Sie hat die Binärentwicklung  $\frac{3}{8} = 0.011_2$ .

(b) Die Zahl  $x = 4.5$  ist dyadisch, da  $x = 9 \cdot 2^{-1}$ , d.h.  $4.5 \in \mathbb{D}_1$ . Sie hat die Binärentwicklung  $4.5 = 100.1_2$ .

(c) Die Zahl  $x = \frac{1}{3}$  ist *nicht* dyadisch: Existierten ganze Zahlen  $m$  und  $n$ , so dass  $\frac{1}{3} = m/2^n$ , so gälte  $2^n = 3m$ , was jedoch unmöglich ist, da (wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung) eine reine Zweierpotenz nie durch 3 teilbar sein kann.  $\frac{1}{3}$  hat die unendliche Binärentwicklung  $\frac{1}{3} = 0.\overline{01}_2$ .

(d) Jede rationale Zahl  $\frac{p}{q}$  mit teilerfremden  $p, q \in \mathbb{Z}$ , wobei  $q$  keine Zweierpotenz ist (d.h.  $\nexists n \in \mathbb{Z}$  mit  $q = 2^n$ ), ist *nicht* dyadisch. Denn angenommen, sie wäre dyadisch, so gäbe es  $m, n \in \mathbb{Z}$ , so dass  $\frac{p}{q} = m/2^n$  gälte, also  $q = 2^n p/m \in \mathbb{Z}$ ; da  $p$  und  $q$  teilerfremd sind, müsste  $p$  sich aus der rechten Seite kürzen lassen, d.h.  $m$  wäre ein Vielfaches von  $p$ , da  $2^n p/m$  aber ganzzahlig wäre, gälte  $m = 2^k p$  für ein  $k \leq n$ , also  $q = 2^{n-k}$ ; das widerspräche aber der Voraussetzung an  $q$ . So sind beispielsweise  $\frac{2}{5} = 0.0\overline{1100}_2$  oder  $\frac{1}{10} = 0.000\overline{1100}_2$  nicht dyadisch.

(e) Eine irrationale Zahl  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  ist *nicht* dyadisch, da  $m/2^n \in \mathbb{Q}$  für jedes  $m$  sofort  $n \in \mathbb{Z}$  impliziert. Z.B. ist  $x = \sqrt{2} = 2^{1/2}$  nicht dyadisch. Allgemein gelten daher die Mengeninklusionen

$$\dots \subset \mathbb{D}_{-1} \subset \mathbb{D}_0 = \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}_1 \subset \dots \subset \mathbb{D}_n \subset \dots \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}. \quad (18)$$

Insgesamt ist also jede ganze Zahl dyadisch, aber die „meisten“ Brüche sind es nicht, und erst recht nicht die irrationalen Zahlen. Anders als  $\mathbb{Q}$  bildet  $\mathbb{D}$  mit der gewöhnlichen Multiplikation keine Gruppe (denn es existiert nicht immer ein Inverses  $x^{-1}$ , z.B.  $3 \in \mathbb{D}$ , aber  $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ ), sondern nur eine Halbgruppe, so wie  $\mathbb{Z}$ .  $\square$

**Definition 2.7** Es bezeichne  $\mathbb{D}[\sqrt{3}]$  die Menge aller Linearkombinationen mit dyadischen Koeffizienten  $p, q \in \mathbb{D}$ , also

$$\mathbb{D}[\sqrt{3}] = \{p + q\sqrt{3} : p, q \in \mathbb{D}\}. \quad (19)$$

Für  $n \in \mathbb{Z}$  bezeichne entsprechend

$$\mathbb{D}_n[\sqrt{3}] = \{p + q\sqrt{3} : p, q \in \mathbb{D}_n\}. \quad (20)$$

Für eine dyadische Zahl  $x \in \mathbb{D}$  sei ihre *Konjugierte* (bzgl.  $\sqrt{3}$ ) definiert durch

$$\overline{p + q\sqrt{3}} := p - q\sqrt{3}. \quad (21)$$

$\square$

**Beispiel 2.8** Für  $\frac{9+5\sqrt{3}}{16} = \frac{9}{2^4} + \frac{5}{2^4} \in \mathbb{D}_4[\sqrt{3}]$  gilt  $\overline{\frac{9+5\sqrt{3}}{16}} = \frac{9-5\sqrt{3}}{16}$ .  $\square$

Die Menge  $\mathbb{D}[\sqrt{3}]$ , versehen mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation, ist ein „Integritätsring“. Das bedeutet, dass die Addition und Multiplikation den Gesetzen der Kommutativität, Assoziativität und Distributivität genügen und in  $\mathbb{D}[\sqrt{3}]$  sowohl ein additives als auch ein multiplikatives neutrales Element (0 und 1) existiert, ebenso ein additives Inverses ( $-x$ ), aber nicht notwendig ein multiplikatives Inverses ( $x^{-1}$ ), siehe [8, §3.1]. Beispielsweise ist  $3 \in \mathbb{D} \subset \mathbb{D}[\sqrt{3}]$ , aber  $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}[\sqrt{3}]$ , vgl. Beispiel 2.6.

**Satz 2.9** Sei  $\varphi$  die Skalierungsfunktion der Daubechies-Klasse D4 aus Beispiel 2.3. Dann gelten für jede dyadische Zahl  $r \in \mathbb{D}$  die folgenden Beziehungen.

$$\varphi(r) = \mathbb{D}[\sqrt{3}], \quad (22)$$

$$\varphi(r) = \overline{\varphi(3-r)} \quad (23)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(r-k) = 1 \quad (24)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (S_1 + k) \varphi(r-k) = r \quad \text{where } S_1 = \sum_{k=0}^{2N-1} 2kh_{2k} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}. \quad (25)$$

*Beweis.* [8, §9.1.2]. □

Gl. (22) und (22) besagen, dass die Berechnung der Werte  $\varphi(r)$  nur für  $0 \leq r \leq \frac{3}{2}$  ausreicht, denn die übrigen Werte folgen durch Konjugation. Insbesondere für die Anfangswerte von  $\varphi$  in (11) gilt  $\varphi(2) = \overline{\varphi(1)}$ . Gl. (24) heißt eine *Zerlegung der Eins*, und Gl. (25) eine *Zerlegung der Identität*.

## 2.2 Eigenschaften der Daubechies-Skalierungsfunktionen

In diesem Abschnitt werden wir einige allgemeine Eigenschaften der Skalierungsfunktionen der Daubechies-Klassen auflisten, die bei der Berechnung ihrer Werte bei gegebenen Filterkoeffizienten  $h_k$  nützlich sind. Zunächst beobachten wir, dass die Normalisierung der Anfangswerte für ganzzahlige Argumente bereits das gesamte Integral der Skalierungsfunktion normalisiert.

**Satz 2.10** Für eine Folge von Filterkoeffizienten  $h_0, \dots, h_{2N-1}$  und eine stetige Funktion  $\varphi \in C^0(\mathbb{R})$ , die den Bedingungen (2) – (6) sowie der Bedingung

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(n) = 1 \quad (26)$$

genügt, gilt  $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1$ .

*Beweis.* Zunächst wird durch Induktion über  $m \in \mathbb{N}$  gezeigt, dass  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^m} \varphi\left(\frac{n}{2^m}\right) = 1$ , danach wird das Integral durch Riemannsche Summen der Mittelpunkte approximiert [8, Prop. 9.2]. □

Weiter betrachten wir die Anfangswerte der Rekursionsgleichung für  $\varphi$  an den „inneren ganzzahligen Punkten“ für  $N > 1$ , wobei wir annehmen, dass  $\varphi$  an den Grenzen des kompakten Trägers verschwindet, also  $\varphi(0) = \varphi(2N-1) = 0$ . (Diese Forderung ergibt sich aus der vorausgesetzten Stetigkeit von  $\varphi$  und entfällt im Falle des unstetigen Haar-Wavelets für  $N = 1$ .) Es folgt direkt [8, §9.1], dass der Vektor  $\mathbf{x} = (\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(2N-2))^T$  ein Eigenvektor mit Eigenwert 1 der  $(2N-2) \times (2N-2)$ -Matrix  $A = (a_{ij})$  mit Einträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{2} h_{2i-j} & \text{wenn } 2i-j \in \{0, \dots, 2N-1\}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (i, j = 1, \dots, 2N-2) \quad (27)$$

ist, also  $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ . Die ungeraden Spalten von  $A$  enthalten also die Filterkoeffizienten mit ungeraden Indizes, und die geraden Spalten diejenigen mit geraden Indizes. Mit der zusätzlichen Bedingung

$$\sum_{n=1}^{2N-2} \varphi(n) = 1 \quad (28)$$

sind die Anfangswerte eindeutig für  $N > 1$ , falls  $A$  regulär (d.h.  $\det A \neq 0$ ) ist.

**Beispiel 2.11** Für  $N = 2$  seien  $h_k$  die Koeffizienten (10) der Wavelets der Daubechies-Klasse D4. Dann ist

$$A = \sqrt{2} \begin{pmatrix} h_1 & h_0 \\ h_3 & h_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} & 3 - \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad (29)$$

also  $\mathbf{x} = (\varphi(1), \varphi(2))$ , und als ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 muss  $\mathbf{x}$  der linearen Gleichung  $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  genügen, oder

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}h_1 - 1 & \sqrt{2}h_0 \\ \sqrt{2}h_3 & \sqrt{2}h_2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(1) \\ \varphi(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Die erste Gleichung liefert beispielsweise  $\varphi(2) = -\frac{\sqrt{2}h_1-1}{\sqrt{2}h_0} \varphi(1) = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \varphi(1)$ , also  $\varphi(1) + \varphi(2) = \frac{2\varphi(1)}{1+\sqrt{3}}$ , und die Normalisierungsbedingung (28) ergibt die Werte  $\varphi(1)$  und  $\varphi(2)$  wie in Gl. (11). Da  $\det A = 2(h_1h_2 - h_0h_3) = \frac{1}{2}$ , ist  $A$  regulär und die Anfangswerte sind durch die Normierung eindeutig bestimmt.  $\square$

### 3 Die schnelle Daubechies-Wavelet-Transformation

Durch eine Linearkombination  $\tilde{f}$  verschobener Skalierungsfunktionen  $\varphi$  und Wavelets  $\psi$  können Daubechies-Wavelets eine Funktion  $f$  approximieren, die ein beliebiges Signal darstellen kann. Je größer dabei der Index der Daubechies-Wavelets, desto glatter die Approximation  $\tilde{f}$  von  $f$ , das nur durch äquidistante Abtastwerte (*sample*)

$$\mathbf{s} = (s_0, s_1, \dots, s_{2^n-2}, s_{2^n-1})$$

bekannt ist. Für die schnelle Wavelet-Transformation *muss* die Anzahl der Abtastungen eine Zweierpotenz sein, ansonsten muss die Menge der Abtastungen verkürzt oder erweitert werden. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass die Werte  $s$  die Signalfunktion  $f$  bei ganzzahligen Punkten abtasten, so dass  $s_k = f(k)$ . (Ansonsten wende die Variablentransformation  $x \rightarrow x/\ell$  an und betrachte  $s_k = f(k/\ell)$ , wobei  $\ell > 0$  die Länge des Abtastintervalls ist.) Die Skalierungsfunktion approximiert zunächst die Abtastwerte  $s$  durch die Linearkombination

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} a_k^{(n)} \varphi(x - k) \quad (31)$$

mit durch das Signal ( $s_k$ ) bestimmten Koeffizienten  $a_k^{(n)}$ . Dies ist eine *diskrete Faltung* (*convolution*) des Signals mit der Skalierungsfunktion [9, §13.1]. Im Wesentlichen

besteht die schnelle Daubechies-Wavelet-Transformation aus zwei Schritten, in denen das Signal mit den verschobenen Skalierungsfunktionen und Wavelets gefaltet werden.

*Schritt 1 (Vorverarbeitung):* Der erste Schritt des Algorithmusses ist die Bestimmung der Anfangswerte der Koeffizienten  $a_0, \dots, a_{2^n-1}$ . Dazu wird die Menge der Abtastungen um  $2^n + N$  Einträge auf

$$s' = \underbrace{(s_0, s_1, \dots, s_{2^n-2}, s_{2^n-1})}_{\text{Abtastwerte}} \underbrace{(s_{2^n}, s_{2^n+1}, \dots, s_{2^{n+1}-2})}_{\text{Erweiterung}} \underbrace{(s_0, s_1, \dots, s_{N-1})}_{\text{Kurzerweiterung}}. \quad (32)$$

erweitert, wobei  $N$  die Anzahl der Daubechies-Koeffizienten  $h_k$  ist. Die erweiterten Werte lauten hierbei

$$s_{2^n} = 2s_0 - s_1, \quad s_k = p(k) \quad \text{für } k = 2^n + 1, \dots, 2^{n+1} - 2, \quad (33)$$

mit dem kubischen Spline

$$p(x) = p_0 + (x + 1 - 2^n) \left( p_1 + (x - 2^n) \left( p_2 + p_3 (x + 1 - 2^{n+1}) \right) \right), \quad (34)$$

mit den Koeffizienten

$$p_0 = s_{2^n-1}, \quad p_1 = s_{2^n-1} - s_{2^n-2}, \quad (35)$$

$$p_2 = \frac{2s_0 - s_1 - s_{2^n-1} - 2^n p_1}{2^n(2^n - 1)}, \quad p_3 = \frac{s_0 - s_{2^n-1} - (2^n + 1) p_1}{2^n(2^n + 1)} - p_2, \quad (36)$$

wobei die Kurzerweiterung aus den ersten  $N$  Abtastwerten besteht. Das ergibt eine „glatte periodische Erweiterung“ der ursprünglichen Abtastung.<sup>4</sup> Mit dem erweiterten Array der Abtastdaten werden die Koeffizienten  $a_k^{(n)}$  als ein gewichteter Mittelwert, eine Faltung, der verschobenen Skalierungsfunktionen berechnet:

$$a_k^{(n)} = \sum_{j=k}^{k+2^n-1} s'_j \varphi(j - k) \quad (k = 0, 1, \dots, 2^{n+1} - 1). \quad (37)$$

*Schritt 2 (Rekursion):* Der rekursive Schritt des Algorithmusses besteht aus der Ersetzung der Summe der Skalierungsfunktionen (31) durch eine Linearkombination aus halb so vielen Skalierungsfunktionen  $\varphi(\frac{x}{2} - 2k)$  und halb so vielen größeren Wavelets  $\psi(\frac{x}{2} - 2k)$ , so dass

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k^{(n-1)} \varphi\left(\frac{x}{2} - 2k\right) + \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k^{(n-1)} \psi\left(\frac{x}{2} - 2k\right). \quad (38)$$

<sup>4</sup>Die Berechnung der glatten periodischen Erweiterung kostet die meiste Laufzeit des gesamten Algorithmusses, ihre Komplexität beträgt  $T(m) = O(m)$ , wo  $m = 2^n$  die Anzahl der Abtastwerte ist. Da außerdem zusätzliche Werte gespeichert werden, muss der Speicherplatz verdoppelt werden. Es gibt andere Mittelungsverfahren, insbesondere die „Spiegelung“, bei der das erweiterte Array der Abtastdaten durch

$$s' = \underbrace{(s_0, s_1, \dots, s_{2^n-2}, s_{2^n-1})}_{\text{Abtastwerte}} \underbrace{(s_{2^n-1}, s_{2^n-2}, \dots, s_0, s_0, s_1, \dots, s_{N-1})}_{\text{Spiegelung}} \underbrace{(s_0, s_1, \dots, s_{N-1})}_{\text{Kurzspiegelung}}$$

gegeben ist. Diese Methode erfordert keine weitere Berechnungszeit oder zusätzlichen Speicherplatz. Der Nachteil ist eine schlechtere Approximation der Signalfunktion.

Die hochgestellten Indizes  $(n-1)$  besagen, dass die Frequenz der entsprechenden Funktion kleiner als die der anfänglichen  $a^{(n)}$ -Koeffizienten ist. Die niedrigeren Koeffizienten lauten

$$a_k^{(n-1)} = \sum_{j=0}^{N-1} h_j a_{2k+j \bmod 2^{n+1}}^{(n)} \quad (39)$$

$$c_k^{(n-1)} = \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^{j+1} h_j a_{2k+2N-1-j \bmod 2^{n+1}}^{(n)} \quad (40)$$

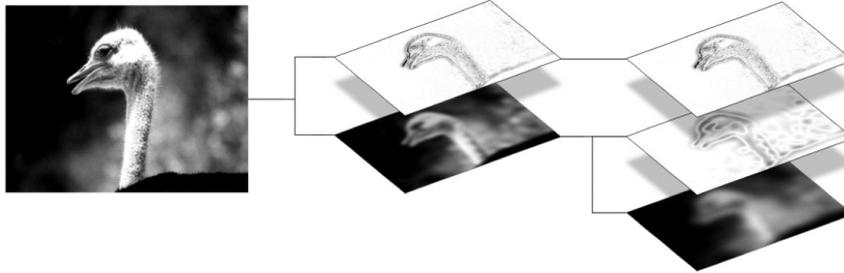
für  $k = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1$ . Im nächsten Rekursionsschritt wird erneut die Summe der  $2^n$  Skalierungsfunktionen in (38) durch eine Summe halb so vieler größerer Skalierungsfunktionen und Wavelets ersetzt, der Wavelet-Teil jedoch bleibt unverändert. Auf diese Weise ergibt der  $r$ -te Rekursionsschritt, mit  $r = 1, 2, \dots, n + 1$ , die Linearkombination

$$\tilde{f}(x) = \sum_{l=1}^r \sum_{k=0}^{2^{n-l}-1} c_k^{(n-l)} \psi\left(\frac{x}{2^l} - 2^l k\right) + \sum_{k=0}^{2^{n-r}-1} a_k^{(n-r)} \varphi\left(\frac{x}{2^r} - 2^r k\right) \quad (41)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_k^{(n-r)} &= \sum_{j=0}^{N-1} h_j a_{(2k+j) \bmod 2^{n-r+2}}^{(n-r+1)} \\ c_k^{(n-l)} &= \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^{j+1} h_j a_{(2k+2N-1-j) \bmod 2^{n-l+2}}^{(n-l+1)} \end{aligned} \quad (42)$$

Auf diese Weise schält jeder Rekursionsschritt des Algorithmusses die Hälfte der Skalierungsfunktionen ab und ersetzt sie durch Wavelets (Abbildung 3). Nach der



**Abbildung 3:** Das „Abschälen“ der Skalierungsfunktionen  $\varphi$  und ihre Ersetzung durch Wavelets gemäß der schnellen Wavelet-Transformation, Gl. (43). Dies führt zu einer sogenannten „Multiskalenzerlegung“ (*multiresolution analysis*), siehe Definition 4.3 weiter unten. Die („Tiefpass-gefilterten“) Wavelet-Teile bleiben jeweils unverändert in den nachfolgenden Iterationen, während die („Hochpass-gefilterten“) Skalierungsfunktionsteile in der jeweils nächsten Iteration zerlegt werden. Abhängig von ihren Frequenzen speichert jeder Wavelet-Teil gröbere Informationen als sein vorhergehender. Somit gibt das erste Wavelet die feinste Information des Signals wieder (scharfe „Kanten“ für eine grobe Skizze eines Bildes), ähnlich dem Ablauf des menschlichen Sehvorgangs. Vgl. Definition 4.3.

$(n + 1)$ -ten Rekursion erhalten wir so eine einzelne Skalierungsfunktion und  $n + 1$

Faltungen mit Wavelets verschiedener Frequenzen,

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(x) &= \sum_{l=1}^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-l}-1} c_k^{(n-l)} \psi\left(\frac{x}{2^l} - 2^l k\right) + \sum_{k=0}^{2^{n-r}-1} a_k^{(n-r)} \varphi\left(\frac{x}{2^r} - 2^r k\right) \\
 &= \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} c_k^{(n-1)} \psi\left(\frac{x}{2} - 2k\right) \\
 &\quad \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} c_k^{(n-2)} \psi\left(\frac{x}{4} - 4k\right) \\
 &\quad \vdots \\
 &+ c_0^{(0)} \psi\left(\frac{x}{2^n}\right) + c_1^{(0)} \psi\left(\frac{x}{2^n} - 2^n\right) \\
 &+ c_0^{(-1)} \psi\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \\
 &+ a_0^{(-1)} \varphi\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)
 \end{aligned} \tag{43}$$

**Beispiel 3.1** Seien  $n = 2$  und  $N = 2$ . Betrachten wir die Abtastung  $s = (0, 1, 2, 3)$ . Die glatte periodische Erweiterung ergibt dann

$$s' = \underbrace{(0, 1, 2, 3)}_{\text{sample}}, \underbrace{(4, 2, 1, -1)}_{\text{extension}}, \underbrace{(0, 1)}_{\text{short ext.}} \tag{44}$$

Dann folgt  $a_0^{(2)} = \sum_0^3 s'_j \varphi(j) = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ ,  $a_1^{(2)} = \sum_1^4 s'_j \varphi(j-1) = \frac{5-\sqrt{3}}{2}$ ,  $a_2^{(2)} = \sum_2^5 s'_j \varphi(j-2) = \frac{7-3\sqrt{3}}{2}$ ,  $a_3^{(2)} = \sum_3^6 s'_j \varphi(j-3) = 3 + \sqrt{3}$ ,  $a_4^{(2)} = \sum_4^7 s'_j \varphi(j-4) = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ ,  $a_5^{(2)} = \sum_5^8 s'_j \varphi(j-5) = \sqrt{3}$ ,  $a_6^{(2)} = \sum_6^9 s'_j \varphi(j-6) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ,  $a_7^{(2)} = \sum_7^{10} s'_j \varphi(j-7) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ . Somit liefert der erste Rekursionsschritt

$$\begin{aligned}
 (a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}) &= \left( \frac{18 - 5\sqrt{3}}{8}, \frac{7 + 5\sqrt{3}}{4}, \frac{8 + 3\sqrt{3}}{8}, 1 - 5\sqrt{3} \right), \\
 (c_0^{(1)}, c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, c_3^{(1)}) &= \left( -\frac{3}{8}, \frac{1 - \sqrt{3}}{4}, \frac{1 - 6\sqrt{3}}{8}, 0 \right).
 \end{aligned}$$

Wiederholung der vorhergehenden Berechnungen ergibt

$$\begin{aligned}
 (a_0^{(0)}, a_1^{(0)}) &= \left( \frac{61 - 21\sqrt{3}}{32}, \frac{35 - 21\sqrt{3}}{32} \right), \\
 (c_0^{(0)}, c_1^{(0)}) &= \left( \frac{35 - 11\sqrt{3}}{32}, -\frac{27 - 3\sqrt{3}}{32} \right),
 \end{aligned}$$

und schließlich

$$(a_0^{(-1)}) = \left( \frac{3}{2} \right), \quad (c_0^{(-1)}) = \left( \frac{13 + 21\sqrt{3}}{32} \right).$$

Wir erhalten also die Wavelet-Transformierte

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) = & -\frac{3}{8}\psi\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1-\sqrt{3}}{4}\psi\left(\frac{x}{2}-2\right) + \frac{1-6\sqrt{3}}{8}\psi\left(\frac{x}{2}-4\right) + 0 \cdot \psi\left(\frac{x}{2}-6\right) \\ & + \frac{35-11\sqrt{3}}{32}\psi\left(\frac{x}{4}-4\right) - \frac{27-3\sqrt{3}}{32}\psi\left(\frac{x}{4}-4\right) \\ & + \frac{13+21\sqrt{3}}{32}\psi\left(\frac{x}{8}\right) + \frac{3}{2}\varphi\left(\frac{x}{8}\right)\end{aligned}\quad (45)$$

Vgl. [8, Ex. 3.21]. □

### 3.1 Die schnelle inverse Daubechies-Wavelet-Transformation

Die schnelle inverse Daubechies-Wavelet-Transformation beginnt mit einer Wavelet-Entwicklung der Form (41), oder äquivalent (43), und rekonstruiert die Koeffizienten  $a_k^{(n)}$  aus Gl. (31), so dass die rekonstruierte Funktion  $\tilde{f}(x)$  näherungsweise dem ursprünglichen Signalfunktion  $f(x)$  gleicht, also  $\tilde{f}(x) \approx f(x)$ . Der Algorithmus beginnt mit dem als  $r = n + 1$  markierten Rekursionsschritt, d.h. der Ebene  $(n - r) = (-1)$ , und berechnet die Koeffizienten  $a_k^{(n-r+1)}$  aus den Koeffizienten  $a_k^{(n-r)}$  and  $c_k^{(n-r)}$  der vorhergehenden Ebene gemäß der Formel

$$\begin{aligned}a_{2k}^{(n-r+1)} &= \sum_{j=0}^{N-1} h_{2j} a_{(k-j) \bmod 2^{n-r+2}}^{(n-r)} + h_{2j+1} c_{(k+j-N+1) \bmod 2^{n-r+2}}^{(n-r)} \\ a_{2k+1}^{(n-r+1)} &= \sum_{j=0}^{N-1} h_{2j+1} a_{(k-j) \bmod 2^{n-r+2}}^{(n-r)} - h_{2j} c_{(k+j-N+1) \bmod 2^{n-r+2}}^{(n-r)}\end{aligned}\quad (46)$$

**Beispiel 3.2** Betrachte die Wavelet-Entwicklung aus Beispiel 3.1, Gl. (45). Im ersten Schritt bestimmen die Koeffizienten  $a_0^{(-1)}$  and  $c_0^{(-1)}$  die Koeffizienten  $a_0^{(0)}$  and  $a_1^{(0)}$  via  $a_0^{(0)} = h_0 a_0^{(-1)} + h_1 c_0^{(-1)} + h_2 a_0^{(-1)} + h_3 c_0^{(-1)}$  und  $a_1^{(0)} = -h_0 c_0^{(-1)} + h_1 a_0^{(-1)} - h_2 c_0^{(-1)} + h_3 a_0^{(-1)}$ , d.h.

$$\left(a_0^{(0)}, a_1^{(0)}\right) = \left(\frac{61+21\sqrt{3}}{32}, \frac{35-21\sqrt{3}}{32}\right).$$

Wiederholung dieser Prozedur ergibt

$$\left(a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}\right) = \left(\frac{18-5\sqrt{3}}{8}, \frac{7+5\sqrt{3}}{4}, \frac{8+3\sqrt{3}}{8}, 1 - \sqrt{3}\right),$$

und

$$\left(a_0^{(2)}, a_1^{(2)}, \dots, a_7^{(2)}\right) = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{5-\sqrt{3}}{2}, \frac{7-\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right).$$

Insbesondere für  $x = 2$  ergibt  $\tilde{f}(2) = \sum_0^7 a_k^{(2)} \varphi(2-k) = 2$ , d.h. der Wert  $f(2)$  ist exakt reproduziert. Das liegt daran, dass  $f$  eine lineare Funktion ist. Im Allgemeinen wird  $\tilde{f}$  allerdings nur eine Approximation des Signals  $f$  ergeben. □

## 4 Allgemeiner Zugang zu Wavelets

Zur Definition allgemeiner Wavelets wird die Fouriertransformation benötigt, siehe Definition 4.2. Sie wird zudem in der Wavelet-Theorie zum Beweis grundlegender Eigenschaften von Wavelets verwendet. Die Fouriertransformation ist eine wichtige Integraltransformation, die breite Anwendung in der Physik und den Ingenieurwissenschaften findet. Ein Wavelet wiederum definiert eine weitere Klasse von Integraltransformationen, die Wavelet-Transformation. Auf diese Weise sind Wavelet-Transformationen Geschwister der Fouriertransformation, die sich in ihren Integralkernen unterscheiden: der Integralkern einer Wavelet-Transformation besteht aus einem Wavelet, derjenige einer Fouriertransformation aus trigonometrischen Funktionen (oder äquivalent aus Potenzen von  $e^{ix}$ ). Während die Fouriertransformation also Signale (oder Funktionen) in unendlich ausgedehnten Sinus- und Cosinusfunktionen (bzw. komplexen Exponentialfunktionen) entwickelt, verwenden Wavelet-Transformationen Wavelets, „Wellchen“, deren Energie um einen Punkt in Zeit oder Raum konzentriert und üblicherweise nur endlich ausgedehnt („kompakter Träger“) ist.

Somit sind Wavelet-Transformierte gut lokalisiert in Zeit oder Raum, im Gegensatz zu einer Fouriertransformierten, die überhaupt nicht lokalisiert ist. Wegen dieser Eigenschaft eignet sich die Fourieranalyse sehr gut für periodische, Zeit-/Raum-invariante oder stationäre Signale, aber natürlicherweise nicht für aperiodische, Zeit-/Raum-variiierende, transiente („flüchtige“, schwankende) Signale. Da eine Wavelet-Transformation von zwei Parametern abhängt, nämlich Skala und Position, ist sie für derartige Signale der Fouriertransformation überlegen, denn die Variation von Skala und Position ermöglicht eine gleichzeitige Zeit- und Frequenzanalyse. Die Wavelet-Transformation ähnelt damit einem Notenblatt, das dem Musiker sowohl die Frequenz als auch den Zeitpunkt eines Tons anzeigt, während die Fouriertransformation die zeitliche Lokalisierung, also den Zeitpunkt eines Tones, unzugänglich in den Phasen versteckt.

### 4.1 Die Fouriertransformation

**Definition 4.1** Für  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  ist die *Fouriertransformierte*  $\hat{f} := \mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  definiert als die Funktion

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-iy \cdot x} dx. \quad (47)$$

(Hier bezeichnet  $y \cdot x = \sum_1^n y_j x_j$  das innere Produkt des Vektorraums  $\mathbb{R}^n$ .) Die Abbildung  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $f \mapsto \hat{f}$ , heißt *Fouriertransformation*.  $\square$

Es gibt viel zu sagen über die Fouriertransformation, vgl. [1]. Wir beschränken uns hier darauf zu erwähnen, dass die Fouriertransformation  $\mathcal{F}$  eine unitäre lineare Abbildung  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  auf dem Funktionenraum  $L^2(\mathbb{R}^n)$  ist, wobei „unitär“ heißt, dass  $\mathcal{F}$  bijektiv ist und die Länge  $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$  von  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  erhält. Die Fouriertransformation ist also ein „Koordinatenwechsel“, ähnlich einer Spiegelung von Basisvektoren des  $\mathbb{R}^n$ . Da  $\mathcal{F}^2 f(x) = f(-x)$  und  $\mathcal{F}^4 f(x) = f(x)$ , also insbesondere  $\mathcal{F}^4 = I$ , wo  $I$  die Identität auf  $L^2(\mathbb{R}^n)$  bezeichnet, ist die Fouriertransformation eine „Isometrie mit Periode 4“. (Eine Spiegelung im  $\mathbb{R}^n$  ist entsprechend eine „Isometrie mit Periode 2“, da sie zweimal angewendet die Identität ergibt.)

Vom physikalischen oder ingenieurwissenschaftlichen Standpunkt aus betrachtet wechselt die Fouriertransformation von der Darstellung einer Funktion, oder eines „Signals“, im Zeit- bzw. Raumbereich zu einer im Frequenz- bzw. Wellenzahlbereich, und umgekehrt. Daher ist sie insbesondere in der Signalverarbeitung sehr wertvoll, da mit ihr ein Signal  $f(t)$  im Zeitbereich als  $\hat{f}(\nu)$  im Frequenzbereich dargestellt werden kann, wo es auf ein gegebenes Frequenzband eingeschränkt („gefiltert“) werden kann.

## 4.2 Grundlegende Eigenschaften von Wavelets

**Definition 4.2** Ein *Wavelet*  $\psi$  ist eine Funktion  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , deren Fouriertransformierte  $\hat{\psi} = \mathcal{F}\psi$  der Gleichung

$$C_\psi := (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(tx)|^2}{|t|} dt < \infty \quad (48)$$

für fast alle  $x \in \mathbb{R}^n$  genügt. Diese Bedingung wird oft das *Zulässigkeitskriterium* (*admissibility criterion*) genannt.  $\square$

Eine direkte Konsequenz von Gl. (48) ist, dass für ein Wavelet stets gilt

$$0 = \hat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) e^{-2\pi i \cdot 0 \cdot x} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx. \quad (49)$$

Für  $n = 1$  schließt ein Wavelet also stets dieselbe Fläche über die  $x$ -Achse wie darunter ein. So entstand der Name Wavelet, abgeleitet vom Französischen *ondelettes* (kleine Wellen).

**Definition 4.3** (*Multiskalenzerlegung*) [6, §4.5] Eine Folge  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  abgeschlossener Unterräume von  $L^2(\mathbb{R}^n)$  ist eine *Multiskalenzerlegung* (*multiresolution analysis*), oder *Multiskalenanalyse*, wenn sie den folgenden sechs Eigenschaften genügt:

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(x - 2^j k) \in V_j \quad \forall j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n, \quad (50)$$

$$V_j \subset V_{j-1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad (51)$$

$$f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(2^{-j}x) \in V_j \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad (52)$$

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}, \quad (53)$$

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = \text{closure} \left( \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j \right) = L^2(\mathbb{R}^n). \quad (54)$$

$$\exists \varphi \in V_0, \text{ so dass } \{\varphi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}^n} \text{ eine Riesz-Basis von } V_0 \text{ ist.} \quad (55)$$

Hierbei ist eine *Riesz-Basis*  $(f_j)_{j \in J}$  eines Hilbert-Raums  $\mathcal{H}$  das Bild einer Hilbert-Basis  $(e_j)_{j \in J}$  von  $\mathcal{H}$  eines Isomorphismus  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ . ( $A$  muss keine Isometrie sein.) Eine Familie  $(e_j)_{j \in J}$  von Vektoren  $e_j \in \mathcal{H}$  in einem Hilbert-Raum heißt *Hilbert-Basis*, wenn  $\text{span} \{e_j : j \in J\}$  dicht in  $\mathcal{H}$  ist, d.h. jeder Vektor  $x \in \mathcal{H}$  beliebig gut durch eine Linearkombination von Vektoren  $e_j$  approximiert werden kann. Die Funktion  $\varphi$  heißt *Skalierungsfunktion*, *Scalet* oder *Vaterwavelet*.  $\square$

Mit einer Riesz-Basis kann also ein Vektor  $x \in \mathcal{H}$  eindeutig in eine Reihe

$$x = \sum_{j \in J} \alpha_j f_j, \quad \text{wobei} \quad \sum_{j \in J} |\alpha_j|^2 < \infty \quad (56)$$

entwickelt werden. Außerdem ist  $\langle x, f_j^* \rangle$  selbst eine Riesz-Basis, wenn  $f_j^* = (A^*)^{-1} e_j$  die duale Basis von  $f_j$  ist. Die beiden Systeme  $(f_j)$  und  $(f_j^*)$  heißen *biorthogonal*. Die Multiskalenzerlegung führt also zu orthonormalen Wavelets wie die Daubechies-Wavelets, aber auch zu biorthogonalen Wavelets, wie wir weiter unten sehen werden.

Bedingung (52) ist die wesentliche Forderung, damit eine Multiskalenzerlegung eine schrittweise Erhöhung der Information von einer feineren Skalenebene ( $j$ ) zu einer größeren Auflösung ( $j + 1$ ) führt. Der Faktor  $2^j$  ist hierbei die *Dilation*, die die

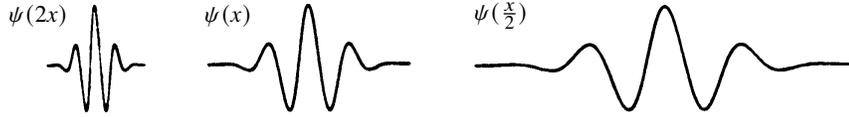


Abbildung 4: Dilationen eines Wavelets  $\psi(x) \in V_0$ . Aus Bedingung (52) folgt  $\psi(2x) \in V_{-1}$  und  $\psi(\frac{x}{2}) \in V_1$ . In einer Multiskalenzerlegung ist  $V_{-1} \supset V_0 \supset V_1$ .

Funktion  $f$  gegenüber der Ebene  $j = 0$  streckt (Abbildung 4). Bedingung (50) impliziert ein weiteres Merkmal der Mehrfachanalyse, die Invarianz von  $V_0$  unter ganzzahligen Translationen,  $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x - k) \in V_0$ . Bedingung (55) schließlich garantiert, dass für jedes  $j \in \mathbb{Z}$  die Funktionen

$$\varphi_{jk}(x) = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}x - k) \quad (k \in \mathbb{Z}^n) \quad (57)$$

eine Riesz-Basis für  $V_j$  bilden. Ist insbesondere  $\varphi_{0k}(x) = \varphi(x - k)$  eine Orthonormalbasis von  $V_0$ , so ist  $\varphi_{jk}$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  eine Orthonormalbasis von  $V_j$  [3, §5.1].

Aus Sicht einer Multiskalenzerlegung ist  $V_j$  also der durch die Basis  $2^{-j/2} \varphi(2^{-j}x - k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}^n$ , aufgespannte abgeschlossene Unterraum von  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Entsprechend hat das orthogonale Komplement  $W_j$  von  $V_j$  in  $V_{j-1}$ , also

$$V_j \oplus W_j = V_{j-1}, \quad (58)$$

eine Riesz-Basis  $2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}^n$ . In diesem Licht erscheinen die Konstruktionen der Wavelet-Pakete, die wir später betrachten werden, als Wechsel der Basis innerhalb jedes  $W_j$ . Es gilt  $W_j \perp W_l$  für  $j \neq l$  und

$$V_j = V_m \oplus \bigoplus_{l=0}^{m-j-1} W_{m-l} \quad \text{für } j < m. \quad (59)$$

Wegen (53) und (54) folgt daraus  $L^2(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$ . Somit ergibt eine Multiskalenzerlegung eine Zerlegung des  $L^2(\mathbb{R}^n)$  in paarweis orthogonale Unterräume. Die Räume  $W_j$  erben die Skalierungseigenschaft (52) von den Räumen  $V_j$ , d.h.

$$f(x) \in W_j \Leftrightarrow f(2^j x) \in W_0. \quad (60)$$

Ist daher ein Wavelet  $\psi$  bekannt, so dass  $\psi_{0,k} = \psi(x - k)$  mit  $k \in \mathbb{Z}^n$  eine Riesz- bzw. Orthonormalbasis von  $W_0$  bildet, so bilden für jedes  $j \in \mathbb{Z}$  die Funktionen

$\psi_{j,k} = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}x - k)$  mit  $k \in \mathbb{Z}^n$  eine Riesz- bzw. Orthonormalbasis von  $W_j$ , und  $(\psi_{j,k})$  mit  $k \in \mathbb{Z}^n$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  bildet eine entsprechende Basis von  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Ein solches Wavelet  $\psi$  kann aus der Skalierungsfunktion  $\varphi$  durch eine einfache Prozedur unter Verwendung der folgenden Eigenschaften von  $\varphi$  and  $W_0$  konstruiert werden.

Da  $\varphi \in V_0 \subset V_{-1}$  und die  $\varphi_{-1,k}$  eine Basis in  $V_{-1}$  bilden, gilt  $\varphi = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k \varphi_{-1,k}$ , wo die Konstanten  $h_k \in \mathbb{C}$  bestimmt sind durch

$$h_k = \langle \varphi, \varphi_{-1,k} \rangle \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}^n. \quad (61)$$

Damit folgt entweder

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k \varphi(2x - k), \quad \text{oder} \quad \mathcal{F}\varphi(y) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k e^{-iky/2} \mathcal{F}\varphi\left(\frac{y}{2}\right), \quad (62)$$

wobei die Konvergenz der Reihe im  $L^2$ -Sinne gilt. Die letzte Formel kann umgeschrieben werden zu

$$\mathcal{F}\varphi(y) = m_0\left(\frac{y}{2}\right) \mathcal{F}\varphi\left(\frac{y}{2}\right), \quad \text{wobei} \quad m_0(y) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k e^{-iky/2}. \quad (63)$$

In dem Falle, dass  $\varphi$  eine Orthonormalbasis ergibt, gilt  $\sum_k |h_k|^2 = 1$ , und  $m_0$  ist eine  $2\pi$ -periodische Funktion, also [3, Gl. (5.1.20)]

$$|m_0(y)|^2 + |m_0(y + \pi)|^2 = 1 \text{ f.ü.} \quad (64)$$

Für den eindimensionalen Fall  $n = 1$  und für eine endliche Anzahl  $N$  von Filterkoeffizienten  $h_k$  kann gezeigt werden [3, Theorem 5.1.1], dass für eine Multiskalenzerlegung ein Wavelet  $\psi$  aus  $\varphi$  durch die Formel

$$\mathcal{F}\psi(y) = e^{-iy/2} \bar{m}_0\left(\frac{y}{2} + \pi\right) \mathcal{F}\varphi\left(\frac{y}{2}\right), \quad (65)$$

oder äquivalent

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_k (-1)^{k-1} h_{2N-k-1} \varphi(2x - k) \quad (66)$$

konstruiert werden kann. Das Wavelet  $\psi$  ist bis auf einen Phasenwechsel und eine ganzzahlige Verschiebung eindeutig.

#### 4.2.1 Wavelets und Bandpassfilter

Die Multiskalenzerlegung in Dimension  $n = 1$  führt auf natürliche Weise zu einem hierarchischen und schnellen Schema für die Waveletkoeffizienten einer gegebenen Funktion. Gegeben sei das innere Produkt eines Signals  $f$  mit den Wavelets  $\varphi_{jk}$  für eine gegebene feine Skala. Durch Reskalierung entweder der Einheiten oder der Funktion  $f$  können wir annehmen, dass die Ebene der feinen Skala  $j = 0$  ist. Gl. (66) kann geschrieben werden als

$$\psi = \sum_k g_k \varphi_{-1,k} \quad (67)$$

wo  $g_k = \langle \psi, \varphi_{-1,k} \rangle = (-1)^k h_{2N-1-k}$  [3, Gl. (5.1.35)]. Daher gilt

$$\psi_{jk}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k) = \sum_l g_l \varphi_{j-1,2k+l}(x) = \sum_l g_{l-2k} \varphi_{j-1,l}(x),$$

also  $\langle f, \psi_{1,k} \rangle = \sum_l \bar{g}_{l-2k} \langle f, \varphi_{0,l} \rangle$ , d.h.  $\langle f, \psi_{1,k} \rangle$  ist eine Faltung der Folge  $(\langle f, \varphi_{0,l} \rangle)_{l \in \mathbb{Z}}$  mit  $(\bar{g}_{-l})_{l \in \mathbb{Z}}$ , die nur die geraden Abtastwerte übrig lässt. Entsprechend gilt

$$\langle f, \psi_{j,k} \rangle = \sum_l \bar{g}_{l-2k} \langle f, \varphi_{j-1,l} \rangle. \quad (68)$$

Daher ergeben sich auch  $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$  durch Faltung mit  $\bar{g}_l$  und Verminderung (*subsampling*) um den Faktor 2 mit  $\langle f, \varphi_{j-1,k} \rangle$ , gegeben durch  $\langle f, \varphi_{j,k} \rangle = \sum_l \bar{h}_{l-2k} \langle f, \varphi_{j-1,l} \rangle$ , vgl. [3, Gl. (5.6.4)], da  $\varphi_{jk} = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}x - k) = \sum_l h_{l-2k} \varphi_{j-1,l}(x)$ . Man beginnt also bei  $\langle f, \varphi_{0,k} \rangle$  und errechnet rekursiv  $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$  und  $\langle f, \varphi_{j,k} \rangle$  aus dem entsprechenden  $(j - 1)$ -Wert.

Der gesamte Prozess kann auch als die Berechnung sukzessive größerer Approximationen von  $f$ , zuzüglich der Informationsdifferenz zwischen aufeinanderfolgenden  $j$ -Ebenen. Wir beginnen also mit einer feinen Skalennäherung  $f^{(0)} = \mathbb{P}_{V_0} f$ , wo  $\mathbb{P}_{V_0}$  die orthogonale Projektion auf den Unterraum  $V_0$  bezeichnet, und zerlegen in jedem Rekursionsschritt  $f^{(j-1)} \in V_{j-1} = V_j \oplus W_j$  in  $f^{(j-1)} = f^{(j)} + q^{(j)}$ , wo  $f^{(j)} = \mathbb{P}_{V_j} f^{(j-1)}$  die Projektion auf  $V_j$  ist, also der nächstgrößere Approximationsschritt in der Multiskalenzerlegung, und  $q^{(j)} = f^{(j-1)} - f^{(j)} = \mathbb{P}_{W_j} f = \mathbb{P}_{W_j} f^{(j-1)}$  die durch den Übergang  $f^{(j-1)} \rightarrow f^{(j)}$  „verlorene“ Information. Da in den Räumen  $V_j$  bzw.  $W_j$  die Riesz-Basen  $(\varphi_{jk})$  bzw.  $(\psi_{jk})$  existieren, gilt

$$f^{(j)} = \sum_k a_k^{(j)} \varphi_{jk}, \quad q^{(j)} = \sum_k c_k^{(j)} \psi_{jk} \quad (69)$$

für bestimmte Konstanten  $a_k^{(j)}$  und  $c_k^{(j)}$ . In jedem Rekursionsschritt ergibt sich also einfach

$$a_l^{(j)} = \sum_k \bar{h}_{l-2k} a_k^{(j-1)} \quad c_l^{(j)} = \sum_k \bar{g}_{l-2k} a_k^{(j-1)}. \quad (70)$$

Die inverse Transformation ergibt entsprechend [3, Gl. (5.6.6)]

$$a_l^{(j-1)} = \sum_k h_{l-2k} a_k^{(j)} + g_{l-2k} c_k^{(j)}. \quad (71)$$

In der Signalverarbeitung drücken die Formeln (70) bzw. (71) den Analyse- bzw. Syntheseschritt einer *Bandpassfilterung* (*subband filtering*) mit exakter Rekonstruktion aus. In einer zweikanaligen Bandpassfilterung wird eine eingehende Folge  $(a_k^{(0)})$  mit zwei verschiedenen Filtern gefaltet, einem Tiefpassfilter und einem Hochpassfilter. Die

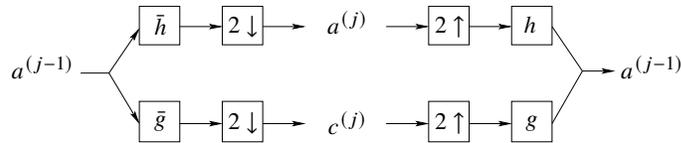


Abbildung 5: Bandpassfilterung für einen Analyse- und einen Syntheseschritt bei der Multiskalenzerlegung. Die Schritte sind durch (70) and (71) gegeben.

beiden resultierenden Folgen werden dann „heruntergetastet“ (*subsampling*), d.h. nur die geraden bzw. nur die ungeraden Einträge bleiben übrig (abhängig von dem Wert  $n$  in (71)).

**Beispiel 4.4** (*Kubischer Spline als Skalierungsfunktion*) Sei  $\varphi$  durch sein Fouriertransformierte

$$\mathcal{F}\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-2iy} \left( \frac{e^{iy} - 1}{iy} \right)^4 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\sin y/2}{y/2} \right)^4, \quad (72)$$

definiert und das entsprechende Wavelet durch

$$\psi(x) = C_0 \left( -\frac{1}{2} \varphi(x+1) + \varphi(x) - \frac{1}{2} \varphi(x-1) \right) \quad (73)$$

mit  $C_0 = 6\sqrt{\frac{70}{1313}}$ . Dann ist  $\varphi$  der grundlegende *kubische Spline*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} (2 - |x|)^3 & \text{wenn } 1 \leq |x| < 2, \\ \frac{2}{3} - x^2(1 - |x|/2) & \text{wenn } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (74)$$

Man sieht dies, da  $\varphi$  die Faltung der Dreiecksfunktion  $T$  mit sich selbst ist, also  $\varphi = T * T$ , wo  $T = 1 - |x|$  für  $|x| \leq 1$  und  $T(x) = 0$  für  $|x| > 1$ , und da  $\mathcal{F}\varphi = (\mathcal{F}T)^2$ . Die Skalierungsfunktion  $\varphi$  und das Wavelet  $\psi$  ähneln der Gauß-Funktion und ihrer zweiten Ableitung, dem „Mexikanerhut“. Allerdings haben weder die Gauß-Funktion noch ihre zweite Ableitung kompakten Träger, während  $\phi$  und  $\psi$  jeweils einen kompakten Träger besitzen. Das Wavelet  $\psi$  genügt (67) mit  $g_0 = C_0$ ,  $g_{\pm 1} = -C_0/2$ ,  $g_k = 0$  für  $k \neq 0, \pm 1$ , während  $\mathcal{F}\varphi(2y) = (\cos y/2)^4 \mathcal{F}\varphi(y)$ , so dass Gl. (62) nun  $\varphi(x) = \sum_k h_k \varphi(2x - k)$  lautet, mit  $h_0 = \frac{3}{4}$ ,  $h_{\pm 1} = \frac{1}{2}$ ,  $h_{\pm 2} = \frac{1}{8}$ , und  $h_k = 0$  für  $k \neq 0, \pm 1, \pm 2$ . Die Skalierungsfunktionen  $\varphi_{j,k}$ , gegeben durch  $\varphi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}x - k)$ , bilden keine Basis of  $L^2(\mathbb{R})$ , sondern nur einen „Frame“, d.h. es existieren Konstanten  $0 < A \leq B < \infty$ , so dass

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j,k} |\langle f, \varphi_{j,k} \rangle|^2 \leq B\|f\|^2,$$

mit  $A = .73178$  und  $B = 1.77107$ , für alle  $f \in L^2(\mathbb{R})$  gilt [3, §3.3.5.D].  $\square$

### 4.3 Orthonormale Waveletpakete

Gemäß [6, §7.2] werden wir für ein gegebenes  $N \in \mathbb{N}$  eine Folge von außerhalb des Hyperwürfels  $[0, 2N - 1]^n$  verschwindenden Funktionen  $w_l$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$  konstruieren, so dass die Teilfolgen  $\{w_l(x - k)\}$  mit  $l \in \mathbb{N}_0$  und  $k \in \mathbb{Z}^n$  jeweils eine Orthonormalbasis von  $L^2(\mathbb{R}^n)$  bilden. Solche Funktionen  $w_l$  heißen „Waveletpakete“.

Für  $n, N \geq 1$  definieren wir  $\mathbb{Z}_{2N}^n = \{0, 1, \dots, 2N-1\}^n$  als das  $n$ -dimensionale Gitter aus  $(2N)^n$  diskreten Gitterpunkten. Dann ist  $k \in \mathbb{Z}_{2N}^n$  ein Multi-Index  $k = (k_1, \dots, k_n)$  mit  $k_j \in \{0, 1, \dots, 2N-1\}$ . Insbesondere für  $n = 1$  gilt einfach  $\mathbb{Z}_{2N}^1 = \{0, 1, \dots, 2N-1\}$ . Betrachten wir dann Konstanten  $h_k \in \mathbb{C}$  mit  $k \in \mathbb{Z}_{2N}^n$ , so dass die trigonometrische Summe  $m_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$m_0(y) = \frac{1}{2^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}_{2N}^n} h_k e^{-iky}, \quad (75)$$

(wo  $ky = \sum_j k_j y_j$ ) den Bedingungen

$$m_0(0) = 1, \quad m_0(y) \neq 0 \text{ für } y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^n, \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}_2^n} m_0(y + \pi k) = 1, \quad (76)$$

genügt, wobei  $\mathbb{Z}_2^n = \{0, 1\}^n$  das  $n$ -dimensionale Gitter der  $2^n$  Gitterpunkte  $(0, \dots, 0, 0)$ ,  $(0, \dots, 1, 0)$ ,  $\dots$ ,  $(1, \dots, 1, 1)$  bezeichnet, also die Ecken des  $n$ -dimensionalen Einheitshyperwürfels. Die Funktion  $m_0$  ist der „Minimalphasenfilter“ (*minimum phase filter*) und ist direkt verknüpft mit einem „uadrature mirror filter“ oder „FIR (finite impulse response)“, während die Koeffizienten  $h_k$  „Impulsantworten“ darstellen. Für gegebene Koeffizienten  $h_k$  definieren wir die *Waveletpakete*  $w_l$  induktiv über  $l = 0, 1, 2, \dots$ , mit Hilfe der beiden Identitäten

$$w_{2l}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{2N}^n} h_k w_l(2x - k), \tag{77}$$

$$w_{2l}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{2N}^n} (-1)^{|k|+1} \bar{h}_{k_*-k} w_l(2x - k), \tag{78}$$

wo  $k_* = (2N - 1, \dots, 2N - 1) \in \mathbb{Z}_{2N}^n$  und wo  $w_0 = \varphi$  durch ihre Fouriertransformierte

$$\mathcal{F} \varphi(y) = \prod_{j=0}^{\infty} m_0(2^{-j}y) \tag{79}$$

definiert ist. Das unendliche Produkt auf der rechten Seite konvergiert tatsächlich absolut und uniform auf kompakten Mengen, da wegen  $\sum_n |h_k| |k| < \infty$  and  $m_0(0) = 1$  sofort  $|m_0(y)| \leq 1 + |m_0(y) - 1| \leq 1 + \sum_k |h_k| |\sin \frac{ky}{2}| \leq 1 + C|y| \leq e^{C|y|}$  folgt. Andererseits kann die Funktion  $\varphi$  iterativ konstruiert werden. Sie heißt *Skalierungsfunktion*. Einmal konstruiert, liefert sie mit Gl. (78) das *Wavelet*  $\psi = w_1$ . Durch Wiederholung dieses Prozesses erzeugen wir, zwei in einem Schritt, alle *Waveletpakete*. Der Träger aller  $w_l$  liegt in  $[0, 2N - 1]^n$ . Das zentrale Ergebnis über die grundlegenden *Waveletpakete* ist, dass die Folge  $w_l(x - k)$  mit  $l \in \mathbb{N}_0$ ,  $k \in \mathbb{Z}^n$ , eine Orthonormalbasis des  $L^2(\mathbb{R}^n)$  bildet. Genauer gesagt ist die Teilfolge  $\{w_l\}$  mit  $2^j \leq l \leq 2^{j+1}$  eine Orthonormalbasis des orthogonalen Komplements  $W_j$  von  $V_j$  in  $V_{j+1}$ .

**Beispiel 4.5 (Daubechies-Wavelets)** Für  $n = 1$  wählen wir die nichtnegative trigonometrische Summe

$$P_N(y) = 1 - \frac{1}{c_N} \int_0^y (\sin u)^{2N-1} du \tag{80}$$

mit der Konstanten  $c_N = \int_0^\pi (\sin u)^{2N-1} du$ , so dass  $P_N(\pi) = 0$ . Mit einem klassischen Resultat, dem Fejér-Riesz-Lemma, existiert eine endliche trigonometrische Summe  $m_0(y) = \frac{1}{2} \sum_0^{2N-1} h_k e^{-iky}$  mit reellen  $h_k$ , so dass  $|m_0(y)|^2 = P_N(y)$  und  $m_0(0) = 1$ . Für  $N = 1$  beispielsweise folgt  $h_0 = h_1 = 1$ , also  $m_0 = \frac{1}{2}(1 + e^{-iy})$ , und die letzte Bedingung in (76) reduziert sich auf  $\cos^2 \frac{y}{2} + \sin^2 \frac{y}{2} = 1$ ; die ist das Haar-Wavelet. Für  $N = 2$  erhalten wir analog mit  $h_0, \dots, h_3$  aus (10) die Skalierungsfunktion  $\varphi$  der Daubechies-Klasse D4 und das entsprechende *Wavelet*  $\psi$  durch  $\psi = w_1$  [3, §6], [6, §§3.8 & 7.2]. □

#### 4.4 Biorthogonale Wavelets

Praktische Anwendungen der Signalverarbeitung haben stets mit dem Problem der Quantisierung zu tun. Im Rahmen der  $L^2$ -Theorie erlaubt jede Orthonormalbasis eine exakte Rekonstruktion eines Signals. In der Praxis liegen die Koeffizienten eines Signals jedoch quantisiert, also als diskrete Abtastwerte, vor, oft aufgrund der prinzipiell

begrenzten Rechengenauigkeit von Prozessoren, aber auch aufgrund notwendiger oder gewünschter Datenkompressionen. Verwenden wir nun beispielsweise bei der Verarbeitung eines Bildes ein unstetiges Wavelet wie das Haar-Wavelet, können störende künstliche Kanten entstehen.

Obwohl die Verwendung glatter orthogonaler Wavelets bessere Ergebnisse liefert, sind sie zur Bildverarbeitung nicht zufriedenstellend. Eine Hauptursache dafür ist die fehlende Symmetrie. Die Skalierungsfunktion  $\varphi$  sollte gerade sein, d.h.  $\varphi(x) = \varphi(-x)$  gelten, und das Wavelet  $\psi$  sollte symmetrisch um  $x = \frac{1}{2}$  sein, also

$$\psi(1-x) = \psi(x). \quad (81)$$

Das Fehlen dieser Symmetrie in Kombination mit Quantisierung führt zu sichtbaren Defekten. Der Grund ist, dass Quantisierungsfehler vorwiegend in der Umgebung von Kanten auftreten und das menschliche visuelle System toleranter auf symmetrische als auf asymmetrische Fehler reagiert. Zudem vereinfachen symmetrische Filter die Behandlung der Bildränder. Symmetrische Filter werden von den Ingenieuren auch „lineare Phasenfilter“ genannt, deren Filterkoeffizienten  $h_k$  die Funktion  $h(y) = \sum_k h_k e^{-iky}$  bilden, so dass  $h(y) = e^{-ily} |h(y)|$  für endlich viele halbzahlige  $l$  gilt, oder äquivalent  $h_k = h_{2l-k}$ .

Zwar gibt es orthogonale Wavelets, die symmetrisch sind, jedoch haben diese keinen kompakten Träger. Das Haar-Wavelet, das sowohl antisymmetrisch um  $x = \frac{1}{2}$  ist als auch kompakten Träger besitzt, ist die einzige Ausnahme dieser Regel [3, Theorem 8.1.4], aber es ist nicht stetig. Geben wir jedoch die Bedingung der Orthogonalität auf, so gewinnen wir einen Freiheitsgrad, der die Konstruktion stetiger Wavelets mit kompaktem Träger und den gewünschten Symmetrien ermöglicht. Dieser Ansatz führt zu biorthogonalen Wavelets, wie sie in dem Bildformat JPEG-2000 implementiert sind.

Zur Einführung biorthogonaler Wavelets betrachten wir zunächst den eindimensionalen Fall, der später zur Konstruktion zweidimensionaler biorthogonaler Wavelets verwendet wird.

#### 4.4.1 Der eindimensionale Fall

Anstatt eine Orthonormalbasis von einem einzelnen Wavelet abzuleiten, schwächen wir unseren Ansatz ab und verwenden zwei Wavelets  $\psi$  und  $\tilde{\psi}$ , um zwei nichtorthogonale Riesz-Basen

$$\psi_{jk} = 2^{j/2} \psi(2^j - k) \quad \text{and} \quad \tilde{\psi}_{jk} = 2^{j/2} \tilde{\psi}(2^j - k), \quad (82)$$

$j, k \in \mathbb{Z}$ , zu bestimmen, die dual zueinander sind. Die erste Basis wird zur Synthese verwendet, die zweite zur Analyse. Dieser abgeschwächte Ansatz für eine Wavelet-Basis und die durch Aufgabe der Bedingung  $\psi = \tilde{\psi}$  gewonnene Flexibilität erlaubt es uns nun, beträchtlich stärkere Forderungen an  $\psi$  zu stellen, beispielsweise die Symmetrieforderung (81). Um die Wavelets  $\psi$  und  $\tilde{\psi}$  zu konstruieren, suchen wir zunächst die Werte von zwei Familien von „Filterkoeffizienten“  $h_k, \tilde{h}_k$  mit den Eigenschaften

$$\sum_k h_k \tilde{h}_{k+2l} = \delta_{0,l}, \quad \left( \sum_k h_k \right) \left( \sum_k \tilde{h}_k \right) = 2, \quad (83)$$

und bestimmen die Skalierungsfunktionen  $\tilde{\varphi}$  und  $\tilde{\psi}$  durch

$$m_0(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k e^{iky}, \quad \tilde{m}_0(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k \tilde{h}_k e^{iky} \quad (84)$$

und

$$\mathcal{F}\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}y), \quad \mathcal{F}\tilde{\varphi}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \prod_{j=1}^{\infty} \tilde{m}_0(2^{-j}y), \quad (85)$$

vgl. [3, §8.3.2]. Dasselbe Argument wie nach Gl. (79) beweist, dass beide unendlichen Produkte absolut und uniform konvergieren. Dann werden die Wavelets  $\psi$  und  $\tilde{\psi}$  durch ihre Fouriertransformierten

$$\mathcal{F}\psi(y) = m_1\left(\frac{y}{2}\right) \mathcal{F}\varphi\left(\frac{y}{2}\right), \quad \mathcal{F}\tilde{\psi}(y) = \tilde{m}_1\left(\frac{y}{2}\right) \mathcal{F}\tilde{\varphi}\left(\frac{y}{2}\right), \quad (86)$$

mit den Funktionen  $m_1(y) = \tilde{m}_0^*(y + \pi)e^{-iy}$ ,  $\tilde{m}_1(y) = \tilde{m}_0^*((y + \pi)e^{-iy})$  definiert. (Das hochgestellte Sternchen \* bezeichnet hier die komplexe Konjugation.)

Die allgemeine Prozedur besteht also darin, zwei trigonometrische Summen  $m_0$  and  $\tilde{m}_0$  anzunehmen, die „Minimalphasenfilter“ oder „Tiefpassfilter“, und aus ihnen die Filterkoeffizienten  $h_k$  and  $\tilde{h}_k$  und die Wavelets abzuleiten. Der große Vorteil ist nun, dass wir die gewünschten Symmetrieeigenschaften an  $m_0$  and  $\tilde{m}_0$  stellen können. Seien  $N$  und  $\tilde{N}$  die jeweilige Anzahl der „Stufenschalter“ (*tap*), d.i. die halbe Anzahl der nichtverschwindenden Filterkoeffizienten  $h_k$  bzw.  $\tilde{h}_k$ . Haben dann die zu  $m_0$  bzw.  $\tilde{m}_0$  gehörenden Filter beide eine ungerade Anzahl  $N$  bzw.  $\tilde{N}$  von Stufenschaltern, so lauten die trigonometrischen Summen  $m_0$  und  $\tilde{m}_0$

$$m_0(y) = e^{-iny} p_0(\cos y), \quad \tilde{m}_0(y) = e^{-in_y} \tilde{p}_0(\cos y) \quad (N, \tilde{N} \text{ ungerade}), \quad (87)$$

für zwei Polynome  $p_0$  und  $\tilde{p}_0$  mit

$$p_0(x) \tilde{p}_0^*(x) + p_0(-x) \tilde{p}_0^*(-x) = 1 \quad (N, \tilde{N} \text{ ungerade}). \quad (88)$$

Diese Gleichung ist das Bezout-Problem, das im Wesentlichen durch den Euklidischen Algorithmus angewendet auf teilerfremde Polynome gelöst wird [3, Theorem 6.1.1]. Für eine gerade Anzahl  $N$  bzw.  $\tilde{N}$  von Stufenschaltern gilt

$$m_0(y) = \frac{\cos \frac{y}{2}}{e^{i(n-\frac{1}{2})y}} p_0(\cos y), \quad \tilde{m}_0(y) = \frac{\cos \frac{y}{2}}{e^{iy}} \tilde{p}_0(\cos y) \quad (N, \tilde{N} \text{ gerade}), \quad (89)$$

für zwei Polynome  $p_0$  und  $\tilde{p}_0$  mit  $\tilde{p}_0$  solves the Bezout problem

$$p_0^\#(x) \tilde{p}_0^*(x) + p_0^\#(-x) \tilde{p}_0^*(-x) = 1 \quad (N, \tilde{N} \text{ gerade}), \quad (90)$$

wo  $p_0^\#(x) = \frac{1+x}{2} p_0(x)$ .

**Beispiel 4.6** (*Daubechies* ( $\tilde{N}, N$ ) *wavelets*) Seien  $n = 0$  und  $\tilde{p}_0(x) = x^{\tilde{N}}$ . Dann ist entweder  $N = 2l$  und  $\tilde{N} = 2\tilde{l}$ , sowie

$$\tilde{m}_0(y) = \left(\cos \frac{y}{2}\right)^{2\tilde{l}}, \quad m_0(y) = \left(\cos \frac{y}{2}\right)^{2l} \sum_{m=0}^{l+\tilde{l}-1} \binom{l+\tilde{l}-1+m}{m} \left(\sin \frac{y}{2}\right)^{2m}, \quad (91)$$

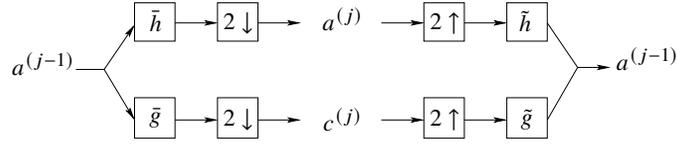


Abbildung 6: Bandpassfilterung mit exakter Synthese für einen Analyse- und einen Syntheseschritt der Multiskalenzerlegung, jedoch mit Analysefiltern ( $\tilde{h}_k$  und  $\tilde{g}_k$ ), die sich von den Synthesefiltern ( $\hat{h}_k$  and  $\hat{g}_k$ ) unterscheiden.

oder  $N = 2l + 1$  und  $\tilde{N} = 2\tilde{l} + 1$ , sowie

$$\tilde{m}_0(y) = \left(\cos \frac{y}{2}\right)^{2\tilde{l}+1}, \quad m_0(y) = e^{-iy} \left(\cos \frac{y}{2}\right)^{2l+1} \sum_{m=0}^{l+\tilde{l}} \binom{l+\tilde{l}+m}{m} \left(\sin \frac{y}{2}\right)^{2m}, \quad (92)$$

siehe [3, §8.3.4]. In beiden Fällen kann  $l \in \mathbb{N}$  frei gewählt werden. Das Ergebnis ist eine Familie biorthogonaler Basen, in denen  $\tilde{\psi}$  eine Spline-Funktion mit kompaktem Träger ist. Für jede vorgegebene Ordnung  $\tilde{l}$  dieses Splines existieren unendlich viele  $l$ , die jeweils unterschiedlichen Wavelets  $\psi$  mit wachsenden Trägervolumen und unterschiedlichen Wavelets  $\tilde{\psi}$  mit wachsender Anzahl verschwindender Momente entsprechen. Die Skalierungsfunktion  $\tilde{\varphi}$  ist dabei durch  $\tilde{N}$  allein festgelegt, während  $m_0$  und somit  $\varphi$  sowohl von  $N$  als auch  $\tilde{N}$  abhängt. Daher kennzeichnen wir sie durch  ${}_{\tilde{N}}\tilde{\varphi}$  sowie  ${}_{\tilde{N},N}\tilde{\psi}$ ,  ${}_{\tilde{N},N}\varphi$  und  ${}_{\tilde{N},N}\psi$ . Einige konkrete Werte von Filterkoeffizienten  $h_k$  sind in Tabelle 2 aufgeführt. Die daraus resultierende Skalierungsfunktion  ${}_{\tilde{N}}\tilde{\varphi}$  ist ein Spline

$\tilde{N} = 2$	$k$	$\tilde{h}_k$	$h_k$
$N = 2$	0	$\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{4}$
	$\pm 1$	$\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{4}$
	$\pm 2$		$-\frac{1}{8}$
$N = 8$	0	$\frac{1}{2}$	$+\frac{22050}{2^{15}}$
	$\pm 1$	$\frac{1}{4}$	$+\frac{10718}{2^{15}}$
	$\pm 2$		$-\frac{3796}{2^{15}}$
	$\pm 3$		$-\frac{3126}{2^{15}}$
	$\pm 4$		$+\frac{1228}{2^{15}}$
	$\pm 5$		$+\frac{670}{2^{15}}$
	$\pm 6$		$-\frac{300}{2^{15}}$
	$\pm 7$		$-\frac{70}{2^{15}}$
	$\pm 8$		$+\frac{35}{2^{15}}$

$\tilde{N} = 3$	$k$	$\tilde{h}_k = \tilde{h}_{1-k}$	$h_k = h_{1-k}$
$N = 3$	1	$\frac{3}{8}$	$+\frac{45}{64}$
	2	$\frac{1}{8}$	$-\frac{7}{64}$
	3		$-\frac{9}{64}$
	4		$+\frac{3}{64}$
$N = 9$	1	$\frac{3}{8}$	$\frac{87318}{2^{17}}$
	2	$\frac{1}{8}$	$+\frac{190}{2^{17}}$
	3		$-\frac{29676}{2^{17}}$
	4		$+\frac{1140}{2^{17}}$
	5		$+\frac{9188}{2^{17}}$
	6		$-\frac{1308}{2^{17}}$
	7		$-\frac{1911}{2^{17}}$
	8		$+\frac{469}{2^{17}}$
	9		$+\frac{189}{2^{17}}$
	10		$-\frac{63}{2^{17}}$

Tabelle 2: Filterbank für einige biorthogonale Wavelets vom Daubechies-Typ  $(\tilde{N}, N)$ . Aufgezeigt sind die nichtverschwindenden Werte [3, Table 8.2]. Beachte, dass  $\sum_k \tilde{h}_k = \sum_k h_k = 1$ , so dass sowohl  $\tilde{h}_k$  und  $h_k$  mit  $\sqrt{2}$  multipliziert werden müssen, um (83) zu erfüllen.

der Ordnung  $(\tilde{N} - 1)$ , z.B. der stückweise konstante bzw. stückweise lineare Spline,

$${}_1\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad {}_2\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{wenn } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (93)$$

sowie der stückweise quadratische Spline

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1)^2 & \text{wenn } -1 \leq x < 0, \\ \frac{3}{4} - (x - \frac{1}{2})^2 & \text{wenn } 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}(x-2)^2 & \text{wenn } 1 \leq x < 2, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (94)$$

[3, §5.4]. □

**Beispiel 4.7** Aus derselben Klasse sind die Wavelets vom Typ Daub-5/3 und Daub-9/7, gegeben durch die Filterkoeffizientenbank in Tabelle 3. Die entsprechenden Wavelets

Daub-5/3 Filterkoeffizienten				Daub-9/7 Filterkoeffizienten			
$\tilde{N} = 2$	$k$	$\tilde{h}_k$	$h_k$	$\tilde{N} = 6$	$k$	$\tilde{h}_k$	$h_k$
$N = 2$	0	1	$+\frac{3}{4}$	$N = 2(??)$	0	+1.115087052456994	+0.6029490182363579
	$\pm 1$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{4}$		$\pm 1$	+0.5912717631142470	+0.2668641184428723
	$\pm 2$		$-\frac{1}{8}$		$\pm 2$	-0.05754352622849957	-0.07822326652898785
			$\pm 3$		-0.09127176311424948	-0.01686411844287495	
			$\pm 4$			+0.02674875741080976	

Tabelle 3: Filterbank der beiden Standardwavelets des JPEG-2000-Formats. Die Koeffizienten sind so skaliert, dass  $\sum_k h_k = 1$ , jedoch  $\sum_k \tilde{h}_k = 2$ . Vgl. <http://www.jpeg.org/public/fcd15444-1.pdf>, S. 108.  $\tilde{h}_k$  wird als die „Impulsantwort des Tiefpass -Synthesefilters“ bezeichnet, während  $h_k$  die „Impulsantwort des Hochpass-Synthesefilters“ ist.

werden in dem Standardbildformat JPEG-2000 verwendet. Sie sind so skaliert, dass  $\sum_k h_k = 1$  and  $\sum_k \tilde{h}_k = 2$ , und es gilt (83). Die Filterkoeffizienten können leicht von Sweldens Liftungsschema<sup>5</sup> abgeleitet werden, ohne explizit die zu Grunde liegenden biorthogonalen Wavelets zu kennen. □

Nach [6, §4.7] erlaubt die Funktion

$$g_N(y) = \frac{1}{c_N} \int_y^\pi (\sin t)^{2N-1} dt \quad (95)$$

mit  $c_N = \int_0^\pi (\sin t)^{2N-1} dt$ , die Funktion  $\tilde{m}_0$  so zu definieren, dass  $m_0(y) \tilde{m}_0(y) = g_N(y)$ . Dann gilt

$$m_0(y) \tilde{m}_0(y) + m_0(y + \pi) \tilde{m}_0(y + \pi) = 1. \quad (96)$$

Damit ist wegen (85) die Identität (96) äquivalent zu der Dualitätsbedingung

$$\int \tilde{\varphi}(x) \varphi(x - k) dx = \delta_{0k}. \quad (97)$$

Die Funktion  $\tilde{\varphi}$  ist gerade und ihr Träger ist das Intervall  $[-2N, 2N]$ . Außerdem ist  $\tilde{\varphi}$  im Hölder-Raum  $C^r$  für genügend großes  $N$ . Die Wavelets  $\psi$  und  $\tilde{\psi}$  sind dann gegeben durch (86). Mit  $\psi_{jk}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$  und  $\tilde{\psi}_{jk}(x) = 2^{j/2} \tilde{\psi}(2^j x - k)$  für  $j, k \in \mathbb{Z}$  kann gezeigt werden, dass  $(\psi_{jk})$  und  $(\tilde{\psi}_{jk})$  einander duale Riesz-Basesen sind, d.h. speziell  $\langle \psi_{jk}, \tilde{\psi}_{j'k'} \rangle = \delta_{jj'} \delta_{kk'}$ . Insbesondere kann ein Signal  $f \in L(\mathbb{R})$  sowohl durch

$$f(x) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\psi}_{jk} \rangle \psi_{jk}(x) \quad \text{als auch durch} \quad f(x) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \tilde{\psi}_{jk}(x) \quad (98)$$

<sup>5</sup>[http://www.ima.umn.edu/industrial/97\\_98/sweldens/fourth.html](http://www.ima.umn.edu/industrial/97_98/sweldens/fourth.html)

dargestellt werden. Der durch die Riesz-Basis  $\varphi(x-k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  aufgespannte Unterraum  $V_0 \subset L^2(\mathbb{R})$  und der durch die Riesz-Basis  $\tilde{\varphi}(x-k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  aufgespannte Unterraum  $\tilde{V}_0 \subset L^2(\mathbb{R})$ , erzeugen mit den Forderungen  $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j$  und  $f(x) \in \tilde{V}_0 \Leftrightarrow f(2^j x) \in \tilde{V}_j$ , zwei einander duale Multiskalenzerlegungen ( $V_j$ ) und ( $\tilde{V}_j$ ). Diese Dualität wird benutzt, um die Unterräume  $W_j$  und  $\tilde{W}_j$  zu definieren:

$$f \in W_j \Leftrightarrow f \in V_{j+1} \text{ und } \langle f, \tilde{u} \rangle = 0 \forall \tilde{u} \in \tilde{V}_j, \quad (99)$$

sowie

$$f \in \tilde{W}_j \Leftrightarrow f \in \tilde{V}_{j+1} \text{ und } \langle f, u \rangle = 0 \forall u \in V_j. \quad (100)$$

#### 4.4.2 Der zweidimensionale Fall

Es gibt mehrere Wege, zweidimensionale Wavelets aus eindimensionalen zu bilden. Eine Möglichkeit ist, einfach das Tensorprodukt von zwei eindimensionalen Waveletbasen als 2-Basis zu nehmen, z.B.  $\Psi_{jkj'k'}(x, y) = \psi_{jk}(x)\psi_{j'k'}(y)$ . Die daraus resultierenden Funktionen sind tatsächlich Wavelets, und  $(\Psi_j)_{j \in \mathbb{Z}^2}$  ist eine Riesz- bzw. Orthonormalbasis von  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , wenn  $\psi_{jk}$  eine Riesz- bzw. Orthonormalbasis von  $L(\mathbb{R})$  ist. In dieser Basis sind Dilationen und Translationen der beiden Variablen  $x$  und  $y$  stets separat.

Für viele Anwendungen ist jedoch eine Konstruktion geeigneter, in der die Dilationen der Waveletbasis beide Variablen simultan verändern. Hierbei beginnen wir nicht mit dem Tensorprodukt der Wavelets, sondern der eindimensionalen Multiskalenzerlegung  $V_j \subset V_{j+1}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ . Wir definieren induktiv

$$V_0 = V_0 \otimes V_0, \quad (101)$$

$$f(x, y) \in V_j \Leftrightarrow f(2^j x, 2^j y) \in V_0, \quad (102)$$

wo  $V_0 \otimes V_0 = \text{closure}(\text{span}\{f(x, y) = f_1(x)f_2(y) : f_1, f_2 \in V_0\})$ , d.h.  $V_0 \otimes V_0$  bezeichnet das Tensorprodukt der *Vektorräume*. Dann bilden die  $V_j$  eine Multiskalenzerlegungsleiter  $\dots, V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \dots$  in  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , die den Gln. (50) – (55) genügt. Da  $\varphi(x-k)$  eine Riesz-Basis für  $V_0$  bildet, bilden die Produktfunktionen

$$\Phi_{j,\mathbf{k}}(x, y) = 2^{-j} \varphi(2^{-j}x - k_1) \varphi(2^{-j}y - k_2), \quad \mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2, \quad (103)$$

eine Riesz-Basis für  $V_j$ . Wie im eindimensionalen Fall definieren wir jedes  $W_j$ , mit  $j \in \mathbb{Z}$ , als das orthogonale Komplement von  $V_j$  in  $V_{j-1}$ , so dass  $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$ . Eine interessante Beobachtung ergibt sich, wenn man diese Zerlegung mit den algebraischen Eigenschaften der durch die Konstruktion gegebenen Räumen vergleicht,

$$\begin{aligned} V_{j-1} &= V_{j-1} \otimes V_{j-1} = (V_j \oplus W_j) \otimes (V_j \oplus W_j) \\ &= \underbrace{(V_j \otimes V_j)}_{V_j} \oplus \underbrace{(W_j \otimes V_j) \oplus (V_j \otimes W_j) \oplus (W_j \otimes W_j)}_{W_j}. \end{aligned}$$

Somit besteht  $W_j$  aus drei orthogonalen Unterräumen, deren Riesz-Basen durch

$$\psi_{j,k_1}(x)\varphi_{j,k_2}(y)$$

für  $W_j \otimes V_j$ ,  $\varphi_{j,k_1}(x)\psi_{j,k_2}(y)$  für  $V_j \otimes W_j$ , und  $\psi_{j,k_1}(x)\psi_{j,k_2}(y)$  für  $W_j \otimes W_j$  gegeben sind. Daher definieren wir *drei* Wavelets,

$$\Psi^h(x, y) = \varphi(x)\psi(y), \quad \Psi^v(x, y) = \psi(x)\varphi(y), \quad \Psi^d(x, y) = \psi(x)\psi(y), \quad (104)$$

wobei h, v, d für „horizontal“, „vertikal“ bzw. „diagonal“ steht. Für gegebenes  $j \in \mathbb{Z}$  bildet dann  $\{\Psi_{j,k}^h, \Psi_{j,k}^v, \Psi_{j,k}^d : k \in \mathbb{Z}^2\}$  eine Basis von  $W_j$ , während  $\{\Psi_{j,k}^h, \Psi_{j,k}^v, \Psi_{j,k}^d : k \in \mathbb{Z}^2\}_{j \in \mathbb{Z}}$  eine Basis von  $L^2(\mathbb{R}^2) = \bigoplus_j W_j$  bildet. Die duale Skalierungsfunktion lautet also  $\tilde{\Phi}(x, y) = \tilde{\varphi}(x)\tilde{\varphi}(y)$ , und die dualen Wavelets  $\tilde{\Psi}^h(x, y) = \tilde{\psi}(x)\tilde{\varphi}(y)$ ,  $\tilde{\Psi}^v(x, y) = \tilde{\psi}(x)\tilde{\varphi}(y)$ ,  $\tilde{\Psi}^d(x, y) = \tilde{\psi}(x)\tilde{\psi}(y)$ , siehe [6, p. 65].

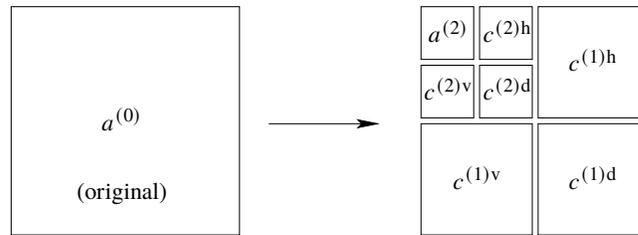


Abbildung 7: Visualisierung der zweidimensionalen Wavelettransformierten. Vgl. Abbildung 8.

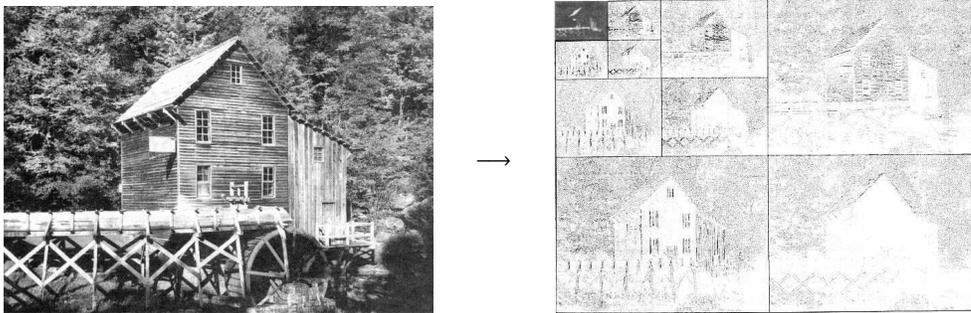


Abbildung 8: Ein Bild und seine Wavelet-Zerlegung. Die Wavelet-Komponenten  $c^h$ ,  $c^v$ ,  $c^d$  heben jeweils die horizontalen, vertikalen bzw. diagonale Kanten hervor. Abbildung mit freundlicher Genehmigung aus [3].

### 4.5 Malvar-Wilson-Wavelets

Um ein gegebenes Signal zu analysieren, zerlegt es eine weite Klasse von Algorithmen in eine Linearkombination von Zeit-Frequenz-Atomen. Diese Atome sind normalerweise explizit bekannt, entweder als Waveletpakete oder als sogenannte Malvar-Wilson-Wavelets. Letztere sind Teil des allgemeinen Zugangs der „gefensterten Fourieranalyse“ (*windowed Fourier analysis*). Das Fenster wird mit  $w$  bezeichnet und schneidet das Signal  $s$  in regelmäßige „Scheiben“  $w(t-lk)s(t)$ , wobei  $k \in \mathbb{Z}$  und  $l$  die nominale Länge der Scheiben bezeichnet. Dieser Abschnitt ist angelehnt an [6, §6.3].

Sei  $n = 1$  und  $(a_j)_{\mathbb{Z}}$  eine Folge mit  $a_j < a_{j+1}$  und  $\lim_{j \rightarrow \pm\infty} a_j = \pm\infty$ , so dass die Intervalle  $[a_j, a_{j+1}]$  eine Zerlegung der reellen Achse  $\mathbb{R}$  ergeben, also  $\mathbb{R} = \bigcup_{-\infty}^{+\infty} [a_j, a_{j+1}]$ . Weiter bezeichne  $l_j = a_{j+1} - a_j$  die Länge des  $j$ -ten Intervalls und sei

$\alpha_j > 0$  klein genug, so dass  $l_j \geq \alpha_j + \alpha_{j+1}$ . Dann heißen Funktionen  $w_j \in C_0(\mathbb{R})$ , für die

$$0 \leq w_j \leq 1 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}, \quad (105)$$

$$w_j(t) = 1 \text{ if } t \in [a_j + \alpha_j, a_{j+1} - \alpha_{j+1}], \quad (106)$$

$$w_j(t) = 0 \text{ if } t \notin ]a_j - \alpha_j, a_{j+1} + \alpha_{j+1}[, \quad (107)$$

$$w_j^2(a_j + \tau) + w_j^2(a_j - \tau) = 1 \text{ if } |\tau| \leq \alpha_j, \quad (108)$$

$$w_{j-1}(a_j + \tau) = w_j(a_j - \tau) = 1 \text{ if } |\tau| \leq \alpha_j, \quad (109)$$

gilt, *Malvar-Fenster*. Man sieht direkt, dass  $\sum_{-\infty}^{+\infty} w_j^2(t) = 1$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Ein einfaches Beispiel eines Malvar-Fensters [3, p. 125] ist

$$w_j(t) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{2} v\left(\frac{t-a_j+\alpha_j}{2\alpha_j}\right), & |t-a_j| \leq \alpha_j, \\ 1 & a_j + \alpha_j < t < a_{j+1} - \alpha_{j+1}, \\ \cos \frac{\pi}{2} v\left(\frac{t-a_{j+1}+\alpha_{j+1}}{2\alpha_{j+1}}\right), & |t-a_{j+1}| \leq \alpha_{j+1}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad v(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \sin^2 \frac{\pi}{2} x, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & 1 < x. \end{cases}$$

Malvar-Fenster können sogar unendlich oft differenzierbar sein, d.h.  $w_j \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Ein

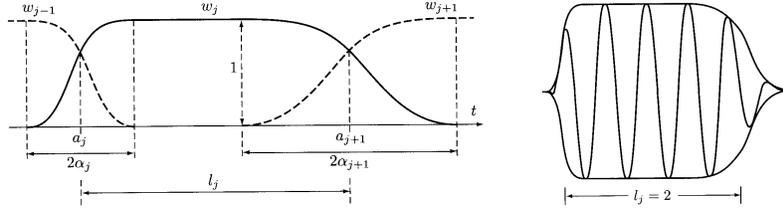


Abbildung 9: Malvar-Fenster (links) und ein Malvar-Wilson-Wavelet  $u_{jk}$  mit  $k = 8$  (rechts). Abbildungen aus [6].

*Malvar-Wilson-Wavelet*  $u_{jk}$  für  $j \in \mathbb{Z}$  und  $k \in \mathbb{N}_0$  ist dann definiert als

$$u_{jk}(t) = \sqrt{\frac{2}{l_j}} w_j(t) \cos \left[ \frac{\pi}{l_j} \left( k + \frac{1}{2} \right) (t - a_j) \right]. \quad (110)$$

Der Quotient  $\frac{k+1/2}{l_j}$  bestimmt die Anzahl der Schwingungen innerhalb des Fensters  $w_j$  (Abbildung 9). Die Funktionen  $u_{jk}$  bilden eine orthonormale Basis des  $L^2(\mathbb{R})$ .

Malvar-Wilson-Wavelets liefern eine Zeit-Frequenz-Analyse, durch eine geeignete Wahl der Malvar-Fenster aber auch eine Zeit-Skalen-Analyse. Dazu definieren wir die Fensterfunktion  $w : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  so, dass

$$w(x) = 0 \quad \text{wenn } |x| \notin \left] \frac{2}{3}, \frac{8}{3} \right[, \quad (111)$$

$$w(-x) = w(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \quad (112)$$

$$w(2x) = w(2-x) \quad \text{für } x \in \left] \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right[, \quad (113)$$

$$w^2(x) + w^2(2-x) = 1 \quad \text{für } x \in \left] \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right]. \quad (114)$$

Dann sind  $w_j(x) = w(2^{-j}x)$  für  $j \in \mathbb{Z}$  Malvar-Fenster mit  $a_j = 2^j$ ,  $\alpha_j = \frac{1}{3} 2^j$ , and  $l_j = \alpha_j + \alpha_{j+1} = 2^j$ . Mit  $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{F}[w(x)e^{i\pi x/2}]$ , können wir die Lemarié-Meyer-Wavelets  $\psi$  durch

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \theta(\pi t) \tag{115}$$

definieren. Dann bilden  $\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$  mit  $j, k \in \mathbb{Z}$  eine orthonormale Basis des  $L^2(\mathbb{R})$ . Ist  $w$  zusätzlich eine unendlich oft differenzierbare Funktion, so ist  $\psi$  von der Schwartz-Klasse  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , vgl. [6, §6.4].

Obwohl recht ansprechend und elegant, produziert die Malvar-Wilson-Wavelet-analyse von Signalen mit Hilfe dyadischer Intervalle oft Artefakte. Beispielsweise ist eines der Ziele bei der Sprachverarbeitung die Extraktion von Phonemen. Phoneme gehorchen jedoch nicht der Bedingung, stets auf dyadischen Intervallen zu beginnen und zu enden.

## 5 Die Wavelet-Transformation

Die Wavelet-Transformation führt eine spezielle Form der Analyse durch, indem das Originalsignal vom Zeitbereich in den Zeit-Frequenz-Bereich bzw. Zeit-Skalen-Bereich, verschoben wird. Die Idee hinter der Wavelet-Transformation ist die Definition einer Menge von Basisfunktionen, die eine effiziente und gleichzeitig informative Darstellung von Signalen erlauben. Entstanden aus Fortschritten bei der Zeit-Frequenz-Lokalisierung bei der gefensterter („Kurzzeit-“) Fourieranalyse, liefert die Wavelet-Theorie Methoden für eine flexible Analyse, da Wavelets insbesondere in einen Frequenzbereich „zoomen“ können.

**Definition 5.1** Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  ein Wavelet. Dann ist die *Wavelet-Transformierte* von  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  die Funktion  $Wf \in L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ ,

$$(Wf)(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a^n}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bar{\psi} \left( \frac{x-b}{a} \right) dx \tag{116}$$

wo  $\bar{\psi}$  die Komplex-Konjugierte von  $\psi$ . Der Skalar  $a > 0$  heißt *Dilation* oder *Skalenfaktor*, und  $b \in \mathbb{R}^n$  heißt *Translation*. Als eine Abbildung  $W = W_\psi : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ , heißt  $W$  die *Wavelet-Transformation* bezüglich  $\psi$ .  $\square$

Die Translation  $b$  verschiebt das Wavelet, so dass  $Wf(a, b)$  lokale Informationen von  $f$  an der Stelle  $x = b$  (bzw. zum Zeitpunkt  $t = b$  für  $n = 1$ ) enthält. Die Dilation  $a$  bestimmt den Einflussbereich, für  $a \rightarrow 0$  „zoomt“ die Wavelet-Transformation um die Stelle  $x = b$ , während  $a \gg 0$  die Auflösung bezüglich Raum (bzw. die Zeit) verringert. Die Wavelet-Transformation  $\mathcal{W}_1$  bezüglich der Dilation  $a = 1$  ist einfach die Faltung von  $f$  mit dem Wavelet,  $Wf(1, b) = (f * \psi)(b)$ , siehe Abbildung 10. Ferner gilt  $|Wf(a, b)| \leq \|f\| \|\psi\|$  für alle  $a, b$ , also ist  $Wf(a, b)$  stetig auf  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$  [6, p. 209]. Die Fouriertransformierte des *Wavelet-Atoms*  $\psi_{a,b}(x) = \sqrt{a^n} \psi(\frac{x-b}{a})$  ist eine gewichtete Dilation von  $\mathcal{F}\psi$  durch  $1/a$ :  $\mathcal{F}\psi_{a,b}(y) = \sqrt{a^n} e^{-2\pi y b} \mathcal{F}\psi(ay)$ . Seine mittlere Frequenz ist daher  $y_0/a$ , wobei  $y_0$  die mittlere Frequenz des Wavelets  $\psi$  ist.

Definieren wir für eine gegebene Konstante  $C_\psi > 0$  den Hilbertraum  $L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, db \frac{da}{C_\psi a^{n+1}})$  von Funktionen  $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  mit dem inneren Produkt  $\langle f, g \rangle_{\text{dil}} =$

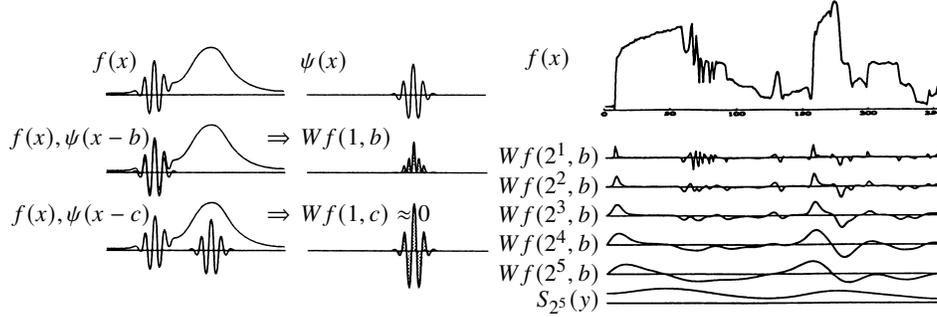


Abbildung 10: (a) Die Wavelet-Transformation als Faltung: für ein Signal  $f(x)$  „filtert“ das Wavelet  $\psi(x)$  nur diejenigen Frequenzen, die von der Größenordnung mit seiner eigenen übereinstimmen, so dass sie für geeignete  $y$  maximal wird und für einige  $z$  verschwindet (b) Skizze der Wavelet-Transformierten in speziellen Skalen eines Signals  $f(x)$ , dessen höchste Frequenzen durch das Wavelet  $\psi$  dargestellt sind: die obere Kurve hat die höchste Auflösung und zeigt die feinsten Details des Signals, die Graphen darunter zeigen seiner niedrigeren Frequenzen. Die „übrigen“ Frequenzen werden durch  $S_{2^5}(b) = \int_{2^5}^{\infty} \int f(x)\psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \frac{da}{a^2}$  dargestellt.

$\int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(a, b) \bar{g}(a, b) \frac{db da}{a^2}$ , so dass  $\|f\|_{\text{dil}} := \langle f, g \rangle_{\text{dil}} < \infty$ . Dann besagt der nächste Satz, dass die Wavelet-Transformation  $W$  eine „partielle Isometrie“ ist.

**Satz 5.2 (Partielle Isometrie)** Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  ein Gl. (48) genügendes Wavelet und  $W : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, db \frac{da}{C_{\psi} a^{n+1}})$  seine Wavelet-Transformation. Für  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$  gilt dann

$$\langle Wf, Wg \rangle_{\text{dil}} = \langle f, g \rangle. \quad (117)$$

Damit ist  $W : L^2(\mathbb{R}^n, dx) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, db \frac{da}{C_{\psi} a^{n+1}})$  eine partielle Isometrie.

*Beweis.* [3, Prop. 2.4.1]. □

**Satz 5.3 (Umkehrsatz)** Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  ein Wavelet und  $W : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$  seine Wavelet-Transformation. Für  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  gilt dann die Umkehrformel

$$f(x) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (Wf)(a, b) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{db da}{a^{n+1}} \quad (\text{f.ü.}) \quad (118)$$

*Beweis.* [6, Theorem B4]. □

Wir können Satz 5.3 in leicht verändert formulieren. Eine direkte Konsequenz von Satz 5.2 und dem Satz von Fubini ist, dass  $(Wf)(a, b)$  für fast alle  $a > 0$  in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  ist, also die Funktion

$$f_a(x) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{\mathbb{R}^n} (Wf)(a, b) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) db \quad (119)$$

wohldefiniert für fast alle  $a > 0$  ist. Diese Funktion  $f_a$  kann als die Komponente von  $f$  bei der Skala  $a$  der durch das Wavelet  $\psi$  gegebenen Zerlegung interpretiert werden. Dann besagt der Umkehrsatz, dass

$$f(x) = \int_0^{\infty} f_a(x) \frac{da}{a^{n+1}}. \quad (120)$$

Somit ist  $f$  die gewichtete Summe seiner Komponenten bei Skala  $a$ . Mit anderen Worten zerlegt eine Wavelet-Transformation ein Signal  $f$  in Koeffizienten bezüglich eines gegebenen Wavelets  $\psi$ . Da alle Wavelets im  $L^2(\mathbb{R})$  leben, ist es interessant zu wissen, ob *jede* Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R})$  durch ein Wavelet approximiert werden kann. Tatsächlich ist dies der Fall: die Menge der Wavelets ist dicht in  $L^2(\mathbb{R})$ .

Das ist jedoch nur eine Seite der Medaille. Fast noch wichtiger für praktische Anwendungen ist die Tatsache, dass für ein einige vernünftige Forderungen an das Abfallverhalten für unendliche Zeiten und Frequenzen [3, Prop. 3.3.2] erfüllendes Wavelet die Menge  $\{\psi_{2^j, 2^j n}\}_{j \in \mathbb{Z}}$  eine Hilbertbasis von  $L^2(\mathbb{R})$  ist, so dass

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j \psi_{2^j, 2^j n}. \quad (121)$$

Das bedeutet, dass jede quadratisch integrierbare Funktion durch ein Wavelet-Atom, also eine gestauchte bzw. gedehnte und verschobene Version eines einzigen Wavelets, angenähert werden kann.

Für die höherdimensionalen Fälle  $n > 1$  gibt es Vorschläge, die Wavelet-Transformierte für nicht rotationssymmetrische Wavelets zu definieren [3, §2.6]. In zwei Dimensionen beispielsweise können wir Rotationen zusätzlich zu Dilationen und Translationen einführen, also einen dritten Parameter  $\theta$  neben  $a$  und  $b$ , so dass die Wavelet-Transformierte

$$Wf(a, b, \theta) = \frac{1}{\sqrt{a^n}} \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \psi \left( R_\theta^{-1} \cdot \frac{x-b}{a} \right) dx, \quad \text{mit } R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (122)$$

und  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $b \in \mathbb{R}^2$ ,  $\theta \in [0, 2\pi[$  lautet. Die Umkehrformel (118) lautet dann

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} (Wf)(a, b, \theta) \psi \left( R_\theta \frac{x-b}{a} \right) d\theta db \frac{da}{a^3} \quad (\text{f.ü.}) \quad (123)$$

## 5.1 Der Bildraum einer Wavelet-Transformation

Ist eine Wavelet-Transformation  $W : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ , wie in (116) definiert, eigentlich surjektiv? In der Tat ist das Bild  $\mathcal{H} := WL^2(\mathbb{R}^n)$  der Wavelet-Transformation nur ein Unterraum des  $L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ , nicht der gesamte Raum. Daher können wir für jedes  $F \in \mathcal{H}$  eine Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  finden, so dass  $F = Wf$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} F(a, b) &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} (Wf)(a', b') \overline{W\psi_{a,b}}(a', b') \frac{db da}{C_\psi a^{n+1}} \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} K(a, b; a', b') F(a', b') \frac{db da}{C_\psi a^{n+1}} \end{aligned} \quad (124)$$

mit

$$K(a, b; a', b') = \overline{(W\psi_{a,b})}(a', b') = \langle \psi_{a', b'}, \psi_{a, b} \rangle, \quad \psi_{a, b}(x) = \sqrt{a^n} \psi \left( \frac{x-b}{a} \right). \quad (125)$$

Da Gl. (124) umgeschrieben werden kann zu  $F(x) = \int K(x, y) F(y) dy$ , heißt der Integrkern  $K$  *reproduzierender Kern* (*reproducing kernel*), und der Raum  $\mathcal{H}$  heißt *rk Hilbertraum*. Ein wichtiger rk Hilbertraum ist der Raum  $\mathcal{B}_\Omega$  der bandlimitierten

Funktionen  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , so dass  $\mathcal{F}f$  kompakten Träger hat, also  $\mathcal{F}f(y) = 0$  für  $|y| > \Omega$ . Hier lautet der Kern  $K(x, y) = \frac{\sin \Omega(x-y)}{\pi(x-y)}$  [3, §2.2]. In diesem besonderen Fall existiert sogar eine Orthonormalbasis  $e_n = K(x_n, y)$  mit  $x_n = \frac{n\pi}{\Omega}$ , die zu die Shannon-Formel  $f(x) = \sum_n f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) \frac{\sin(\Omega x - n\pi)}{\Omega x - n\pi}$  führt. Solch spezielle  $x_n$  existieren jedoch nicht notwendig in einem allgemeinen rk-Hilbertraum.

## 6 Sweldens' Liftungsschema

Eine andere Technik zur Konstruktion biorthogonaler Wavelets und Multiskalenerlegungen ist das *Liftungsschema* [11]. Es funktioniert für diskrete Abtastwerte eines Signals. Der Hauptunterschied zur oben eingeführten klassischen Konstruktion ist, dass eine Liftung nicht auf der Fouriertransformation beruht und zur Konstruktion von Wavelets verwendet werden kann, die nicht notwendig Translationen und Dilationen eines einzigen Mutter-Wavelets sind.

Das Liftungsschema ist ein rekursiver Algorithm, der aus den Koeffizienten  $a_k$  der Skalierungsfunktion und  $c_k$  des Wavelets besteht, genau wie die Daubechies-Wavelet-Transformation. Seine Grundidee ist, in jedem Rekursionsschritt  $r$  so weit wie möglich nur die geraden Abtastwerte der Koeffizienten  $a_k^{(r-1)}$  aus dem vorherigen Rekursionsschritt als *Approximationen*  $a_k^{(r)}$  zu übernehmen und die *Details* als Wavelet-Koeffizienten  $c_k^{(r)}$  so zu speichern, dass das ursprüngliche Signal eindeutig rekonstruiert werden kann. Als ein wichtiges Beispiel betrachten wir die spezielle Liftungstransformation

$$\begin{aligned} c_k^{(r)} &= a_{2k+1}^{(r-1)} - \frac{1}{2} \left( a_{2k}^{(r-1)} + a_{2k+2}^{(r-1)} \right), \\ a_k^{(r)} &= a_{2k}^{(r-1)} + \frac{1}{4} \left( c_{k-1}^{(r)} + c_k^{(r)} \right) \end{aligned} \quad (126)$$

Hier messen die Details  $c_k$  die Abweichung einer linearen Vorhersage und werden verwendet, um die Approximationen der geraden Abtastwerte zu „liften“. Als Hochpass- und Tiefpassfilter betrachtet werden die Detailkoeffizienten  $c_k$  durch drei Signalkoeffizienten  $a_k$  der nächstfeineren Ebene beeinflusst, während ein Approximationskoeffizient  $a_k$  durch fünf Koeffizienten der nächstfeineren Ebene. Die (analytischen) Hochpassfilterkoeffizienten  $\tilde{h}$  and the (analytischen) Tiefpassfilterkoeffizienten sind daher durch

$$\begin{array}{c|ccccc} \tilde{h}_k & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \hline h_k & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{array} \quad (127)$$

gegeben. Das sind genau die Filterkoeffizienten des Daub-5/3-Wavelets aus dem Bildformat JPEG-2000, vgl. Beispiel 4.7.

Im Allgemeinen hat die Implementierung des Liftungsschemas Vorteile gegenüber derjenigen der üblichen diskreten Wavelet-Transformation. Erstens reduziert es die Anzahl an Gleitkommaoperationen, in speziellen Fällen kann es sogar mit reinen Ganzzahloperationen implementiert werden, die schneller als Gleitkommarechnungen sind. Zweitens erlaubt sie eine ortsfeste (*in-place, in situ*) Implementierung, da das ursprüngliche Signal durch seine Wavelet-Transformierte ersetzt werden kann, ohne zusätzlichen Hilfsspeicher zu benötigen.

## 7 Chirplets und die Wavelet-Transformation

Sei  $H^2(\mathbb{R})$  der *Hardy-Raum* der Klasse  $p = 2$ , bestehend aus den Funktionen  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , deren holomorphe Erweiterungen  $f(x + iy)$  auf die komplexe obere Halbebene  $\mathbb{P}^+ = \{x + iy : y > 0\}$  der Bedingung

$$\sup_{y>0} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty \quad (128)$$

genügen. Ist diese Bedingung erfüllt, so wird das Supremum genau für  $y \rightarrow 0$  erreicht. Der Raum  $H^2(\mathbb{R})$  ist ein abgeschlossener Unterraum von  $L^2(\mathbb{R})$ .

Hardy-Räume spielen in der Signalverarbeitung eine grundlegende Rolle. Einem reellwertigen Signal  $f$ , das für alle  $t \in \mathbb{R}$  von endlicher Energie ist, ordnet man das analytische Signal  $F$  zu, so dass  $f(t) = \operatorname{Re} F(t)$ . Nach Voraussetzung gilt  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , also  $F \in H^2(\mathbb{R})$ . Dann ist  $F(t) = f(t) + ig(t)$ . (Die Funktion  $g$  ist die „Hilberttransformierte“ von  $f$ , d.h.  $g = Hf$  mit  $(Hf)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt$ ; da  $\|Hf\|_2 = \|f\|_2$  und  $H(Hf) = -f$ , ist  $H$  eine  $L^2$ -Isometrie der Periode 4, so wie die Fouriertransformation.)

Ein *Chirp* („Zirp“) ist eine Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R})$  der Form  $f(t) = A(t) \cos \varphi(t)$ , deren zugeordnetes analytisches Signal  $F \in H^2(\mathbb{R})$ ,  $F(t) = A(t)e^{i\varphi(t)}$  ist, und deren *Betrag*  $A$  und *Argument*  $\varphi$  reellwertig sind, zu  $C^\infty(\mathbb{R})$  gehören und den Bedingungen

$$\left| \frac{A'(t)}{A(t)\varphi'(t)} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^2} \right| \ll 1. \quad (129)$$

genügen. Die Funktion  $\omega(t) = \frac{\varphi'(t)}{2\pi}$  definiert dann die instantane Frequenz des Chirps, und die lokale Pseudoperiode ist durch deren Kehrwert  $2\pi/\varphi'(t)$  gegeben. Mit den Bedingungen (129) variieren sowohl der Betrag  $A(t)$  als auch die Pseudoperiode nur langsam auf einer durch die lokale Pseudoperiode  $2\pi/\varphi'(t)$  gegebenen Skala. Im Folgenden werden wir der Einfachheit halber  $f$  und  $F$  identifizieren.

Ein *linearer Chirp* ist ein Signal  $f(t) = e^{i(\alpha t + \beta t^2)}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , ein *exponentieller Chirp* ist ein Signal  $f(t) = e^{ikt}$ , with  $n \in \mathbb{N}$ , und ein *hyperbolischer Chirp* ist ein Signal  $f(t) = e^{i\lambda \log t}$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

A *Chirplet* ist ein gefensterter Anteil eines Chirps  $f(t)$ ,

$$\psi_j(t) = w_j(t)f(t). \quad (130)$$

Beispielsweise kann  $w_j$  ein Malvar-Fenster sein (was Chirplets mit kompaktem Träger ergibt), oder ein um  $t_j$  zentriertes Gaußsches Fenster.

**Beispiel 7.1** Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie sagt Gravitationswellen voraus. Bisher hat man sie allerdings nie beobachten können. Einer der Prozesse, der mutmaßlich vergleichsweise starke Gravitationswellen erzeugt, ist der Kollaps eines Doppelsystems. Hier sollte ein Signal

$$f(t) = (t - t_0)^{-1/4} \cos \left( \omega(t_0 - t)^{5/8} + \theta \right) \quad (131)$$

entstehen, wo  $t_0$  der Zeitpunkt des Kollapses,  $\theta$  ein Parameter und  $\omega$  eine große, von den Massen der beiden Sterne abhängige Konstante ist. Da die Messung von

Gravitationswellen von hohem wissenschaftlichen Interesse ist, sind solche Signale ideal zum Testen und Vergleichen verschiedener Zeit-Frequenz-Algorithmen. Für ein Signal (131) vereinfachen sich die beiden Bedingungen (129) zu  $|t - t_0| \gg \omega^{-8/5}$ .

Für  $t_0 = 0$  ist eine Segmentierung der Halbgeraden  $[t_0 = 0, \infty[$  durch  $t_k = c\omega^{-5/8}k^{24/5}$  mit  $k = 1, 2, \dots, k_0 = c^{-1/6}\omega^{1/3}$  gegeben. Das bedeutet, dass die Größe des Segmentierungsschritts von  $\omega^{-1/3}$  bis  $\omega^{-8/5}$  reicht, wenn  $t$  den Zeitpunkt  $t_0 = 0$  erreicht, also die Zeit des Kollapses. Für weitere Hinweise siehe [6, §6.11].  $\square$

Eine von Innocent und Torr sani vorgeschlagene Wavelet-Technik zur Messung von Chirps, insbesondere solche wie in (131), basiert auf einer „Graterkennung“ (*ridge detection*). Der „Grat“ ist ein Bereich nahe  $b = t_0$ , in dem die Wavelettransformierte eines Chirps groß ist. Betrachte den Chirp  $f(t) = A(t)e^{i\varphi(t)}$ . Seine Wavelettransformierte

$$Wf(a, b) = \frac{1}{a} \int f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (132)$$

wird klein sein, wenn der Chirp und das Wavelet nicht mit derselben Frequenz schwingen, da sich die Terme gegenseitig wegheben. Entsprechend wird die Wavelettransformierte groß sein, wenn die Pseudoperiode  $2\pi/\varphi'(b)$  mit der Pseudoperiode  $a$  des Wavelets übereinstimmt. Somit ist die Wavelettransformierte groß in der Umgebung der Kurve  $a = 2\pi/\varphi'(b)$ . Auf dieser Kurve heben sich die Terme nicht gegenseitig auf und die Wavelettransformierte ergibt sich durch

$$Wf(a, b) = \frac{1}{a} \int f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \approx \frac{1}{a} \int |f(t)| \left| \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right| dt = \frac{1}{a} \int A(t) \left| \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right| dt.$$

Mit der ersten Bedingung in (129) erwarten wir, dass  $A(t)$  auf dem Träger des Wavelets nicht stark variiert, so dass  $\frac{1}{a} \int A(t) \left| \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right| dt \approx \|\psi\|_1 A(b)$ . Dieses Argument führt auf die folgende Heuristik: Die stetige Wavelet-Transformation eines Chirps ist groß in einer Umgebung der Kurve  $a = 2\pi/\varphi'(b)$ , wobei

$$Wf(a, b) \approx \|\psi\|_1 A(b).$$

Im Falle eines durch den Kollaps eines Doppelsternsystems erzeugten Chirps (131) gilt  $\varphi(t) = (t - t_0)^{5/8}$  and  $A(t) = (t - t_0)^{-1/4}$ , und der Grat befindet sich nahe der Kurve

$$a = \frac{16\pi}{5\omega} (t_0 - b)^{3/8}. \quad (133)$$

Setzen wir  $\|\psi\|_1 = 1$ , so gilt  $|Wf(a, b)| \approx (t_0 - b)^{-1/4}$  nahe dieser Kurve. Der Grat hängt damit also nur von den zwei Parametern  $t_0$  und  $\omega$  ab, d.h. die Lokalisierung des Grats im Zeit-Frequenz-Diagramm ermöglicht es,  $t_0$  zu finden und damit den Parameter  $\omega$  der charakteristischen Masse zu bestimmen.

## 8 Sehen

Das in der Wahrnehmungspsychologie gängige Modell des Sehens, wie übrigens auch dasjenige des Tastsinns, lässt sich weitgehend als ein Wavelet-Modell verstehen. Betrachten wir zunächst, wie der Sehvorgang im Groben verläuft. Nachdem die Netzhaut

in unserem Auge die Verarbeitung eines Bildes abgeschlossen hat, schickt sie ihre Ergebnisse an den Sehnerv des Gehirns, ein elektrisches Kabel, das aus Millionen von Drähten, den *Axonen*, besteht. Viele dieser Drähte führen zunächst zum Nerven Kern des *Kniehöckers* im Mittelhirn, dem *Nucleus geniculatus lateralis* (GL). Nach der Verarbeitung im GL gehen die Daten über einen weiteren Axonenstrang zum *primären visuellen Kortex* V1.

Jedes am Sehvorgang beteiligte Neuron hat ein *rezeptives Feld*. Das ist ein räumlich begrenztes Areal des Gesichtsfeldes, in dem bei Änderungen von Lichtintensitäten sich Entladungsraten des Sehneurons ändert. Beispielsweise haben viele Neuronen des GL ein rezeptives Feld wie in Abbildung 11 (a). Abhängig von der Größe und der

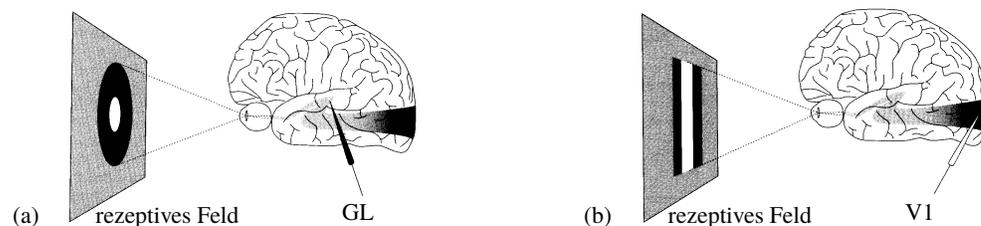


Abbildung 11: Lichtmuster auf einem Sichtschirm als rezeptive Felder, die bestimmte Neuronen stimulieren. (a) Rezeptives Feld für viele der Neuronen aus dem GL. (b) Rezeptives Feld für viele der Neuronen aus dem V1. Abbildungen nach [5]

Position des Lichtmusters werden bestimmte Neuronen stimuliert und erhöhen ihre durch Elektroden messbaren Entladungsraten. Im V1 dagegen gibt es viele Neuronen, deren rezeptives Feld aus Linien besteht, Abbildung 11 (b). Es gibt es also für jeden räumlichen Bereich und jedes (sichtbare!) Lichtmuster des Gesichtsfelds bestimmte Neuronen, die nach dieser Kombination „Ausschau“ halten. An einem Sehvorgang sind etwa mehrere Millionen Neuronen in der Netzhaut und dem GL beteiligt, im V1 sogar mehrere Hundert Millionen [4, §4.1.5], [5, §3].

Im Wavelet-Modell des Sehvorgangs ist das Bild vor unseren Augen das Signal, das aus verschiedenen rezeptiven Feldern zusammengesetzt ist. Aus der eigenen Erfahrung kennen wir die Entsprechung des Tastsinns, wo die rezeptiven Felder der Fingerspitzen beispielsweise wesentlich kleiner sind als die des Handrückens, so dass wir die Glätte oder Rauigkeit einer Fläche sehr gut mit den Fingerspitzen, jedoch weniger gut mit dem Handrücken fühlen können.

Das, was wir sehen, wird also vom Gehirn in unterschiedliche rezeptive Felder zerlegt, genau wie Signale im Bereich der Signalverarbeitung in Wavelets zerlegt werden. Entsprechend ist die Reaktion eines bestimmten Neurons der „Wavelet-Koeffizient“. Spricht ein Neuron nicht an, so ist er null, spricht es mehrfach und sehr stark an, so ist er sehr groß. Wie bei der Wavelet-Transformation kodieren kleine rezeptive Felder kleine Skalen (entsprechend einer hohen Auflösung, hoher Detailtreue, guter räumlicher Lokalisierung), und große rezeptive Felder große Skalen (entsprechend einer schlechten räumlichen Auflösung, aber einer gut definierten Frequenz).

## 8.1 Marrs Programm

In den 1970er Jahren arbeitete eine von Marvin Minsky am Laboratorium für Künstliche Intelligenz am MIT geleitete Gruppe über künstliches Sehen von Robotern. Das

Ziel war die Konstruktion von Robotern, die ihre Umgebung wahrnehmen. Die ersten Versuche verliefen enttäuschend für die Roboterwissenschaftler, so dass David Marr, ein britischer Experte für das menschliche visuelle System, eingeladen wurde, der Gruppe beizutreten. Ausgehend von der Beobachtung, dass nicht die reine Imitation der Natur, wie das Kopieren von Vogelformen oder Federnstrukturen, zur Konstruktion von Flugzeugen geführt hat, sondern das Verständnis der *Gesetze* der Aerodynamik, denen der Flug von Vögeln gehorcht, entwickelte Marr ein Modell des Sehens, welches sowohl dem menschlichen visuellen System als auch dem künstlichen Sehen (*computer vision*) zu Grunde liegt. Er identifizierte vier entscheidende Schritte des menschlichen Sehens:

1. Das Erkennen von Objektkonturen. Das sind Linien, die Objekte begrenzen und auf diese Weise die Umgebung in verschiedene Objekte strukturiert.
2. Das Empfinden der dritten Dimension aus zweidimensionalen Netzhautbildern und die Fähigkeit, eine dreidimensionale Organisation des physikalischen Raums zu erhalten.
3. Die Erkennen von Reliefs aus Schatten.
4. Das Wahrnehmen von Bewegung in einer animierten Szene.

Daraus schloss er, dass eine Theorie des Sehens die folgenden fundamentalen Fragen zu beantworten hat:

1. Wie können die Konturen von Objekten durch den Veränderungen ihrer Lichtintensität wissenschaftlich definiert werden?
2. Wie ist es möglich, räumliche Tiefe zu empfinden?
3. Wie wird Bewegung wahrgenommen? Wie erkennen wir aus einer Abfolge von Bildern, dass ein Objekt sich bewegt hat?

Marrs Arbeitshypothese war, dass das menschliche Sehen und das künstliche Sehen auf denselben Prinzipien beruhen, so dass algorithmische Antworten auf diese Fragen mit Computern getestet werden können. Funktionieren solche Algorithmen auf dem Rechner, so kann untersucht werden, ob und wie sie physiologisch implementiert werden können. Marr bezweifelte beispielsweise, dass menschliche neuronale Schaltungen iterative Schleifen verwenden, die ein wesentlicher Bestandteil der existierenden Computeralgorithmen sind.

Die zentrale Frage der eigentlichen physiologischen Implementierung ist die *Darstellung* der Information, auf der die Schalgorithmen beruhen. Die Art der Darstellung hat umgekehrt beträchtliche Folgen für den Algorithmus selbst. Um ein elementares Beispiel zu nehmen, der Algorithmus zur Multiplikation zweier ganzer Zahlen in der Darstellung des Dezimalsystems wird ganz anders sein als in derjenigen der Römischen Zahlen.

## 8.2 Kantenerkennung durch Nulldurchgänge

Nach Marr durchläuft die Verarbeitung des menschlichen visuellen Systems eine hierarchische Struktur mit mehreren Verarbeitungsebenen. Die erste Ebene ist das *retinale*

*Bild*, das eine räumliche Verteilung von Helligkeitswerten über die Netzhaut darstellt. Es ist der Ausgangspunkt für das Sehen und die nachfolgenden internen Berechnungsschritte.

Auf der zweiten Ebenen entsteht daraus der *erste Entwurf* (*raw primal sketch*). Hier wird das retinale Bild in Skizzen verschiedener Skalen in geometrischer Progression zerlegt. Diese Skizzen bestehen aus Linien und werden durch die *Nulldurchgänge* der zweiten Ableitung der Intensitätsverteilung  $f$  erkannt, da sie die Minima und Maxima der Intensitätsänderung lokalisiert, also der ersten Ableitung von  $f$ . Um Intensitätsänderungen effizient zu erkennen, schlägt Marr vor, dass das visuelle System auf diesen Stufen Filter verwendet, die die erste und zweite Ableitung der Intensitätsverteilung des Bildes durchführen und zusätzlich auf verschiedenen Skalen arbeiten, so dass große Filter verschwommene Schattierungen erkennen und kleine Filter feine, scharfe Details des Bildes. In [7] wird dazu das Wavelet

$$\psi_\sigma(x, y) = -\frac{1}{\pi\sigma^4} \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2} \right) e^{-(x^2 - y^2)/2\sigma^2}, \quad (134)$$

vorgeschlagen, das heute *Marr-Wavelet* oder *Mexikanerhut-Wavelet* genannt wird. Es gilt  $\psi_\sigma(x, y) = \Delta G(x, y)$ , wo  $\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}$  der Laplace-Operator und  $G$  die zweidimensionale Gauß'sche Dichtefunktion  $G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(x^2 + y^2)/2\sigma^2}$  ist.

Es sei ein Schwarzweißbild durch die Graustufen  $f(x, y)$  in seinen Pixelpunkten  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  dargestellt. Dann sind die Nulldurchgänge gegeben durch die Nullstellen der Faltung von  $f$  mit dem Wavelet  $\psi_\sigma$ , also  $(f * \psi_\sigma)(x, y) = 0$ . Da  $\psi$  gerade ist, d.h.  $\psi(-x, -y) = \psi(x, y)$ , sind die Werte der Faltung  $f * \psi_\sigma$  bis auf eine Konstante die Wavelet-Koeffizienten von  $f$ , analysiert mit  $\psi$ . Mit anderen Worten sind die Nulldurchgänge des Bildes durch das Verschwinden der Wavelet-Koeffizienten bestimmt,

$$W_\psi f(\sigma; x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = -\frac{1}{\pi} \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) e^{-(x^2 - y^2)/2}, \quad (135)$$

Die Werte von  $\sigma$  werden während des menschlichen Sehvorgangs in geometrischer Progression verwendet, Experimente weisen auf die Werte

$$\sigma_j = \left(\frac{7}{4}\right)^j \sigma_0, \quad j \in \mathbb{N}_0, \quad (136)$$

hin; für Details und weiterführende Hinweise siehe [6, §8.2]. Marr vermutete, dass das

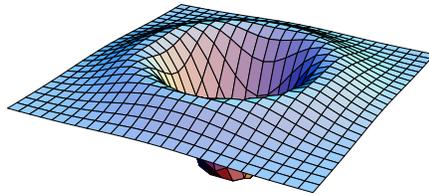


Abbildung 12: Das Marr-Wavelet, oder Mexikanerhut-Wavelet.

ursprüngliche Bild durch die Kurvenlinien  $(f * \psi_{\sigma_j})(x, y) = 0$  *vollständig* bestimmt sei. In dieser Allgemeinheit formuliert ist die Vermutung falsch, da ein Gegenbeispiel für ein periodisches, einen unbegrenzten Bereich abdeckendes Bild bekannt ist [6, §8.3].

Allerdings ist bis heute offen, ob die Vermutung für ein Bild endlicher Ausdehnung wahr oder falsch ist.

Aus Sicht der aktuellen Forschung zum künstlichen Sehen leidet der Zugang von Marr und Hildreth an zwei Mängeln. Erstens erzeugt er Impulsantworten, die gar keinen Kanten entsprechen, sogenannte „falsche Kanten“ (*false edges*), und zweitens sind die Lokalisierungsfehler bei gekrümmten Kanten beträchtlich. Zu den momentan am meisten verwendeten Methoden zur Kantenerkennung gehören der Canny-Algorithmus, der nach lokalen Richtungsmaxima der Gradientengröße sucht, oder der differentielle Zugang, der nach Nulldurchgängen des Differentialausdrucks sucht, der der Ableitung zweiter Ordnung in den Gradientenrichtungen entspricht.

Eine bemerkenswerte Eigenschaft des Marr-Hildreth-Algorithmus zur Kantenerkennung ist, dass er stets zusammenhängende geschlossene Konturen bildet, es sei denn die Konturen verlassen den Bereich des Bildes. Dafür ist allerdings die Lokalisierung insbesondere für große Werte von  $\sigma$  eher schlecht. Die Canny'sche Kantenerkennung hat stattdessen eine bessere Lokalisierung, gerade für große Werte von  $\sigma$ , die Kantensegmente jedoch sind oft getrennt.

### 8.3 Mallats Algorithmus

Stéphane Mallat verallgemeinerte Marrs Zugang, indem er die Gaußsche Dichtefunktion durch den kubischen Spline  $\theta$  mit kompaktem Träger  $[-2, 2]$  ersetzte, der durch die Faltung  $\theta = T * T$  gegeben ist, wo  $T$  die Dreiecksfunktion  $T(x) = 1 - |x|$  für  $|x| \leq 1$  und  $T(x) = 0$  für  $|x| > 1$  ist, vgl. Figure 13 (b), und Beispiel 4.4.  $\theta$  heißt *Glättungsfunktion*. Seien  $f$  die zu analysierende Signalfunktion und  $\theta_\sigma(x) = \sigma^{-1}\theta(\sigma^{-1}x)$ . Dann

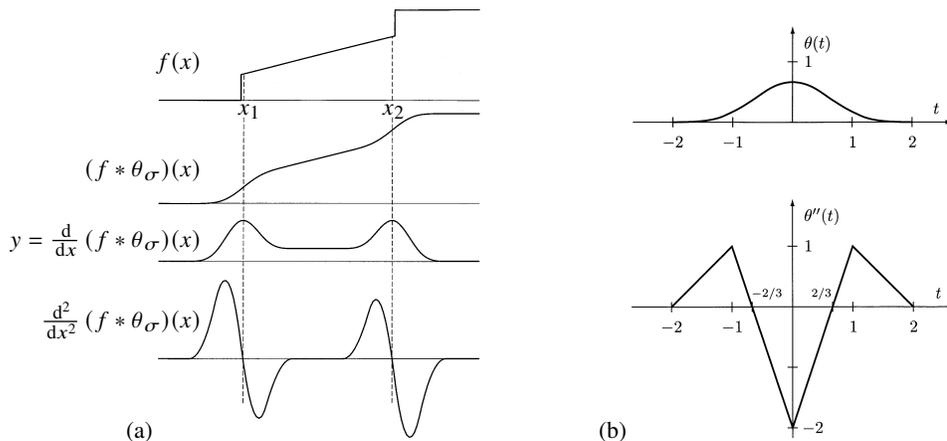


Abbildung 13: (a) Mallats Algorithmus. (b) Der kubische Spline  $\theta = T * T$  und seine zweite Ableitung  $\theta''$ . Abbildungen aus [6] ©SIAM

sind die Nulldurchgänge durch die Werte of  $x$  gegeben, für die die zweite Ableitung  $\frac{d^2}{dx^2} (f * \theta_\sigma)(x) = 0$  ergibt und das Vorueichen wechselt. Um den „Pyramidalalgorithmus“, also die diskrete Wavelet-Transformation, einzusetzen, verwendet Mallat die Dilationen  $\sigma = 2^{-j}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  und kodiert das Signal  $f(x)$  mit der Doppelfolge  $(x_{q,j}, z_{q,j})$ , wobei

(a)  $x = x_{q,j}$  ein Nulldurchgang von  $\frac{d^2}{dx^2} (f * \theta_{2^{-j}})$  ist, und

$$(b) z_{q,j} = \frac{d}{dx}(f * \theta)(x_{q,j}).$$

Mit anderen Worten enthält die Doppelfolge die  $(x, y)$ -Werte der lokalen Extrema der ersten Ableitung  $\frac{d}{dx}(f * \theta)$ . Einige dieser lokalen Extrema sind mit Punkten verknüpft, in deren Umgebung das Signal  $f$  sich rapide verändert, d.h. für die  $|z_{q,j}| \gg 0$  gilt, z.B. wie  $x_1$  and  $x_2$  in Abbildung 13 (a). Nur diese Werte werden gespeichert, die anderen werden ignoriert. Eine Realisierung dieser Idee ist es, einen gewissen Schwellwert  $z_{\min} > 0$  zu verwenden, so dass nur Nulldurchgänge mit  $|z_{q,j}| \gg z_{\min}$  gespeichert werden.

Kann ein beliebiges durch eine Signalfunktion  $f$  mit kompaktem Träger bestimmtes und durch Mallats Algorithmus gefiltertes Bild vollständig rekonstruiert werden? Im Allgemeinen lautet die Antwort: Nein.

**Beispiel 8.1** (*Meyers Gegenbeispiel*) Ein auf Meyer zurückgehendes Gegenbeispiel [6, §C] ist die Signalfunktion  $f(t) = f_0(t) + g'''(t)$ , mit

$$f_0(t) = \begin{cases} 1 + \cos t & \text{wenn } |t| \leq \pi, \\ 0 & \text{wenn } |t| > \pi, \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} -h(-t) & \text{wenn } 0 \leq t, \\ h(t) & \text{wenn } \frac{\pi}{8} \leq t < \frac{\pi}{4}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{137}$$

wobei  $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  eine beliebige Funktion mit Träger in  $[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}]$  ist. □

Es gibt jedoch Möglichkeiten, Mallats Algorithmus zu retten und perfekte Rekonstruierbarkeit zu garantieren. Einerseits kann man eine andere Glättungsfunktion  $\theta$  verwenden, beispielsweise das *Tukey-Fenster*

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 + \cos t & \text{wenn } |t| \leq \pi, \\ 0 & \text{wenn } |t| > \pi. \end{cases} \tag{138}$$

Damit kann jede reellwertige Funktion  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  mit Kenntnis der Werte  $(x_{q,-j}, y_{q,-j})_{j \in \mathbb{N}}$  eindeutig rekonstruiert werden [6, Theorem C.1].

Die zweite Möglichkeit, Mallats Algorithmus korrekt funktionieren zu lassen, ist es, die Menge der zu analysierenden Signalfunktionen  $f$  zu beschränken. Ist  $f$  beispielsweise eine Stufenfunktion mit einer beliebig großen Anzahl von Unstetigkeitsstellen, so ist sie vollständig rekonstruierbar durch die Folge  $(x_{q,j}, z_{q,j})_{q,j \in \mathbb{Z}}$  [6, §8.4]. Da jedes digitale Signal jedoch stets eine Stufenfunktion mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen darstellt, und ebenso jedes durch die Netzhautzellen verarbeitete Bild aus Stufenfunktionen besteht, ist diese Einschränkung in der Praxis sogar sinnvoll, sowohl für das künstliche als auch das menschliche Sehen.

### 8.3.1 Mallats Algorithmus in zwei Dimensionen

Sei  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  ein Signal eines zweidimensionalen Bildes. Daraus erzeugen wir immer verschwommenere Versionen bei Skalen  $\sigma_j = 2^{-j}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , indem wir die Faltungen  $f * \theta_{\sigma_j}$  verwenden, wobei

$$\theta_\sigma(x, y) = \theta_\sigma(x)\theta_\sigma(y). \tag{139}$$

Hie bezeichnet  $\theta(\cdot)$  den kubischen Spline wie im eindimensionalen Fall.

Als nächstes betrachten wir die lokalen Maxima des Betrags des Gradienten von  $f * \theta_{\sigma_j}$ , also  $|\nabla(f * \theta_{\sigma_j})|(x_q, y_q)$ , wobei  $\nabla = \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}\right)$ . Hier sind die Nulldurchgänge durch die Punkte  $(x_q, y_q) \in \mathbb{R}^2$  gegeben, wo der Laplace-Operator verschwindet,

$$\Delta(f * \theta_{\sigma_j})(x_q, y_q) = 0, \quad (140)$$

mit  $\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}$ , und wobei zudem Punkte  $(x_{\pm}(r), y_{\pm}(r))$  existieren, so dass auf jedem Kreis um  $(x_q, y_q)$  mit Radius  $r < \epsilon$  für einige  $\epsilon > 0$

$$\Delta(f * \theta_{\sigma_j})(x_{\pm}(r), y_{\pm}(r)) \geq 0 \quad (141)$$

gilt. Im Falle eines Bildes mit diskreten Pixeln ist diese Bedingung äquivalent zu dem Kriterium, dass der Laplace-Operator mindestens eines der acht das Pixel  $(x_q, y_q)$  umgebenden Pixel negativ ist, und mindestens eins positiv. Die Positionen  $(x_q, y_q)$  dieser Nulldurchgänge als auch die Werte der ihrer Gradienten,  $(z_{1,q}, z_{2,q}) = \nabla(f * \theta_{\sigma_j})(x_q, y_q)$ , werden dann gespeichert.

## Literatur

- [1] APPEL, Walter: *Mathématiques pour la physique et les physiciens*. 3 Edition. Paris : H&K Éditions, 2005
- [2] DAUBECHIES, Ingrid: Orthonormal bases of compactly supported wavelets. In: *Comm. Pure and Applied Mathematics XLI* (1988), Nr. 8, S. 909–996
- [3] DAUBECHIES, Ingrid: *Ten Lectures on Wavelets*. Philadelphia : Society of Industrial and Applied Mathematics, 1992
- [4] GUSKI, Rainer: *Wahrnehmen — ein Lehrbuch*. Stuttgart Berlin Köln : W. Kohlhammer, 1996
- [5] HOFFMAN, Donald D.: *Visuelle Intelligenz. Wie die Welt im Kopf entsteht*. Stuttgart : Cotta'sche Buchhandlung, 2000
- [6] JAFFARD, Stéphane ; MEYER, Yves ; RYAN, Robert D.: *Wavelets. Tools for Science and Technology*. Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001
- [7] MARR, D. ; HILDRETH, E.: Theory of edge detection. In: *Proc. Roy. Soc. London Ser. B* 207 (1980), S. 187–217
- [8] NIEVERGELT, Yves: *Wavelets Made Easy*. Boston Basel Berlin : Birkhäuser, 1999
- [9] PRESS, William H. ; TEUKOLSKY, Saul A. ; VETTERLING, William T. ; FLANNERY, Brian P.: *Numerical Recipes in C++*. The Art of Scientific Computing. 2 Edition. Cambridge : Cambridge University Press, 2002
- [10] RESNIKOFF, Howard L. ; WELLS, Raymond O.: *Wavelet Analysis. The Scalable Structure of Information*. New York : Springer-Verlag, 1998
- [11] SWELDENS, Wim: The lifting scheme: a custom-design construction of biorthogonal wavelets. In: *Applied and Computational Harmonic Analysis* 3 (1996), Nr. 2. <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9911079>

## Web-Links

- [Abb] <http://wolframcloud.com/obj/abbott/Published/D4Rationals.nb> – Abbott, Paul C.: Wolfram Notebook zur Berechnung von Daubechies Wavelets zur Skalenfunktion  $\varphi(\frac{1}{3})$
- [L1] <http://www.cmap.polytechnique.fr/~bacry/LastWave/> – LastWave, a C-programmed signal processing oriented command language