

# Das Ternärsystem

Andreas de Vries

*FH Südwestfalen University of Applied Sciences, Haldener Straße 182, D-58095 Hagen, Germany*

e-Mail: [de-vries@fh-swf.de](mailto:de-vries@fh-swf.de)

Erste Version: 4. September 2006, diese Version: 13. Februar 2013

Dieses Skript unterliegt der *Creative Commons License 3.0*  
(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/deed.de>)



## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Definition</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Umrechnung zwischen Ternär- und Dezimaldarstellung</b>	<b>2</b>
2.1	Umrechnung von Ternär- nach Dezimaldarstellung . . . . .	2
2.2	Umrechnung von Dezimal- in Ternärdarstellung . . . . .	3
2.3	Ternärbrüche . . . . .	5
2.4	Arithmetik im Ternärsystem . . . . .	6
2.4.1	Subtraktion und Division mit Hilfe des Komplements . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Das balanzierte Ternärsystem</b>	<b>8</b>
3.1	Umrechnung von balanzierter Ternär- in Dezimaldarstellung . . . . .	9
3.2	Umrechnung von Dezimal- in balanzierte Ternärdarstellung . . . . .	9
3.3	Umrechnung zwischen gewöhnlicher und balanzierter Ternärdarstellung	10
3.4	Balanzierte Ternärbrüche . . . . .	10
3.5	Arithmetik im balanzierten Ternärsystem . . . . .	11
3.6	Teilbarkeitsregeln . . . . .	12
3.7	Anwendungen . . . . .	13
3.7.1	Optimale Standardgewichte für eine Balkenwaage . . . . .	13
3.7.2	Dreiwertige Logik . . . . .	13
3.8	Vorteile des balanzierten Ternärsystems . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Diskussion</b>	<b>15</b>

In diesem Aufsatz wird ein kurzer Überblick über zwei Varianten des ternären Zahlensystems und deren Arithmetik gegeben. Insbesondere wird das balanzierte Ternärsystem betrachtet und dessen wesentlichen Vorteile gegenüber anderen Zahldarstellungen diskutiert. Eine der Schlussfolgerungen ist, dass das balanzierte Ternärsystem das effizienteste Zahlensystem überhaupt ist.

## 1 Definition

Das *Ternärsystem* oder *triadische System* ist eine Zahldarstellung zur Basis 3. Der Ziffernvorrat besteht also aus drei Ziffern, üblicherweise  $\{0, 1, 2\}$ , und jede reelle Zahl  $z$  lässt sich in eine eindeutige Reihe entwickeln,

$$z = \pm \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot 3^k \quad \text{mit } a_k \in \{0, 1, 2\}. \quad (1)$$

Die Zahl wird dann durch ihre Ziffern entsprechend dargestellt, also

$$z = \pm \dots a_2 a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots \quad (2)$$

Gibt es hierbei Koeffizienten  $a_k$  für negative  $k$ , so wird nach dem Koeffizienten  $a_0$  ein Komma (bzw. ein Punkt) geschrieben. Führende Nullen werden bei dieser Darstellung weggelassen, genau wie hängende Nullen nach dem Komma. Um Verwechslungen mit anderen Zahlensystemen zu vermeiden, wird oft die Basiszahl, hier also 3, als Index angehängt. Beispielsweise wird die Zahl  $z = 7$  im Dezimalsystem, also  $z = 7_{10}$ , im Ternärsystem durch

$$z = 21_3$$

dargestellt. Für eine ganze Zahl gilt  $a_k = 0$  für  $k < 0$ , und nur endlich viele der Koeffizienten  $a_k$  mit  $k \geq 0$  sind positiv.

Da eine einzelne Ziffer drei mögliche Werte annehmen kann, ist die kleinste Informationseinheit im Ternärsystem das *Trit* (für *triadic digit*), analog dem auf das Binärsystem zurückführbare Bit (für *binary digit*). Da ein Trit drei Werte annehmen kann, ist der Informationsgehalt eines Trits etwa um den Faktor 1,585 höher als der eines Bits, genauer

$$1 \text{ trit} = \log_2 3 \text{ bit} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \text{ bit} \approx 1,5849625 \text{ bit}. \quad (3)$$

Sechs ternäre Stellen ergeben ein Tryte,

$$\boxed{1 \text{ tryte} = 6 \text{ trit}}, \quad (4)$$

analog dem Byte, das 8 bits entspricht. Ein Tryte kann also  $3^6 = 729$  Werte annehmen, ein Byte dagegen nur  $2^8 = 256$ .

## 2 Umrechnung zwischen Ternär- und Dezimaldarstellung

### 2.1 Umrechnung von Ternär- nach Dezimaldarstellung

Die Umrechnung vom Ternär- ins Dezimalsystem folgt direkt aus (1): Entsprechend der Stelle  $k$  des Koeffizienten links oder rechts vom Komma wird er mit der Potenz  $3^k$

multipliziert und zu den anderen aufsummiert. Beispielsweise ist

$$2010_3 = 2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^1 = 54 + 3 = 57_{10}.$$

Ein davon abgeleitetes und effizienteres Rechenschema für eine ganze Zahl ist das folgende: Multipliziere die erste Ziffer (von links) der umzuwandelnden Zahl mit 3, addiere dazu die nächste Ziffer, multipliziere diese Summe mit 3, usw. . . . Für  $2010_3$  ergibt das z. B.

$$\begin{array}{r|cccc}
 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
 + & & 6 & 18 & 57 \\
 \hline
 & 2 & 6 & 19 & 57
 \end{array} \tag{5}$$

Entsprechend ist  $2210_3 = 75_{10}$ .

**Beispiel 2.1.** Ein interessantes Beispiel ist die Zahl  $z = 0, \bar{1}_3$ . Gemäß Gl. (1) gilt

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} - 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Die dritte Gleichung folgt aus der Formel für die geometrische Reihe. Entsprechend gilt  $0, \bar{2}_3 = 1$ . □

## 2.2 Umrechnung von Dezimal- in Ternärdarstellung

Wie berechnet man nun jedoch die Ternärdarstellung einer im Dezimalsystem gegebenen Zahl? Wir benötigen dazu zwei Rechenoperationen, die *ganzzahlige Division* ( $\lfloor \cdot \rfloor$ ) und die *Modulo-Operation* ( $\%$ ). Für zwei ganze Zahlen  $m$  und  $n$  ist die ganzzahlige Division  $\lfloor m/n \rfloor$  definiert als die größte ganze Zahl, mit der  $n$  multipliziert gerade noch kleiner gleich  $m$  ist. Hierbei heißen die Klammern  $\lfloor \cdot \rfloor$  die *untere Gaußklammer* oder im Englischen die *floor-brackets*. Für eine reelle Zahl  $x$  bezeichnet  $\lfloor x \rfloor$  die größte ganze Zahl kleiner oder gleich  $x$ , oder formaler:

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\} \tag{7}$$

Die unteren Gaußklammern  $\lfloor x \rfloor$  einer positiven Zahl  $x > 0$  bewirken somit einfach, dass ihre Nachkommastellen abgeschnitten werden, also  $\lfloor \pi \rfloor = 3$ ,  $\lfloor 3 \rfloor = 3$ . Für negative Zahlen bewirken sie jedoch, dass stets aufgerundet wird, beispielsweise  $\lfloor -5,43 \rfloor = -6$  oder  $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ .

Einfach ausgedrückt:  $\lfloor m/n \rfloor$  ist gleich  $m \div n$  ohne die Nachkommastellen. Beispielsweise ist

$$\lfloor 13/3 \rfloor = 4.$$

$m \% n$  ist der Rest der ganzzahligen Division von  $m$  durch  $n$ , also z.B.

$$13 \% 3 = 1.$$

Insgesamt gilt also

$$m \div n = \lfloor m/n \rfloor \text{ Rest } (m \% n),$$

etwa  $13 \div 3 = 4$  Rest 1. Weitere Beispiele:

$$\lfloor 14/3 \rfloor = 4, \quad 14 \% 3 = 2,$$

$$\lfloor 14/7 \rfloor = 2, \quad 14 \% 7 = 0,$$

$$\lfloor 14/1 \rfloor = 14, \quad 14 \% 1 = 0,$$

$$\lfloor 3/5 \rfloor = 0, \quad 3 \% 5 = 3.$$

Die Umrechnung einer Zahl  $z$  von Dezimal- in Ternärdarstellung geschieht nach folgender Vorschrift:

1. Erstelle eine Tabelle mit den Spalten  $z$ ,  $\lfloor z/3 \rfloor$  und  $z \% 3$ .
2. Setze jeweils für  $z$  den Wert der zu berechnenden Zahl ein; beispielsweise  $z = 75$ :

$z$	$\lfloor z/3 \rfloor$	$z \% 3$
75		

die Berechnung ergibt dann:

$z$	$\lfloor z/3 \rfloor$	$z \% 3$
75	25	0

3. Nimm als neuen Wert für  $z$  die Zahl aus der Spalte  $z/3$ , wenn diese nicht 0 ist, und wiederhole den Vorgang bei Schritt 2.

$z$	$\lfloor z/3 \rfloor$	$z \% 3$
75	25	0
25		

Die Ternärdarstellung ergibt sich, wenn man die Zahlen in der Spalte  $z \% 3$  von unten nach oben aneinander reiht. Berechnen wir z.B.  $z = 75$ .

$z$	$\lfloor z/3 \rfloor$	$z \% 3$	$z$	$\lfloor z/3 \rfloor$	$z \% 3$	$z$	$\lfloor z/3 \rfloor$	$z \% 3$	$z$	$\lfloor z/3 \rfloor$	$z \% 3$
75	25	0	75	25	0	75	25	0	75	25	0
25	8	1	25	8	1	25	8	1	25	8	1
8			8	2	2	8	2	2	8	2	2
			2			2	0	2	2	0	2

Es gilt also  $75_{10} = 2210_3$ . Entsprechend berechnet man für  $z = 57$ :

$z$	$\lfloor z/3 \rfloor$	$z \% 3$
57	19	0
19	6	1
6	2	0
2	0	2

Also ist  $57_{10} = 2010_3$ .

### 2.3 Ternärbrüche

Die Berechnung von Kommazahlen ist ebenso möglich, allerdings ist das Umrechnungsschema etwas anders. Betrachten wir zunächst die Umrechnung von der Ternärdarstellung in die Dezimaldarstellung. Auch hier folgt alles aus der Gleichung (1), nur muss man jetzt die Kehrwerte  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{9}$ ,  $\frac{1}{27}$  der Dreierpotenzen verwenden. Beispielsweise ist

$$0,201_3 = 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{27} = \frac{19}{27} = 0,\overline{703}. \quad (8)$$

Für die Umrechnung der Dezimaldarstellung in die Ternärdarstellung verwendet man wie im Falle der ganzen Zahlen eine Tabelle, jedoch diesmal mit den Spalten  $z - \lfloor z \rfloor$ ,  $3z$  und  $\lfloor 3z \rfloor$ . Damit ergibt sich der folgende Algorithmus zur Berechnung der Ternärdarstellung einer gegebenen positiven Zahl  $z$  in ihre Dezimaldarstellung.

1. Erstelle eine Tabelle mit den Spalten  $z - \lfloor z \rfloor$ ,  $3z$  und  $\lfloor 3z \rfloor$ .
2. Setze jeweils für  $z$  den Wert der zu berechnenden Zahl ein und berechne die Spaltenwerte.
3. Nimm als neuen Wert für  $z$  die Zahl aus der Spalte  $3z$ , wenn diese nicht 0 ist, und wiederhole den Vorgang bei Schritt 2.

Die Ternärdarstellung ergibt sich, wenn man die Zahlen in der Spalte  $\lfloor z \rfloor$  von oben nach unten aneinander reiht. Beispielsweise ergibt sich für den periodischen Dezimalbruch  $z = 0,\overline{703}$  die folgende Tabelle.

$z \leftarrow z - [z]$	$3z$	$[3z]$
0. $\overline{703}$	$\boxed{2.\overline{1}}$	2
0. $\overline{1}$	$\boxed{0.\overline{3}}$	0
0. $\overline{3}$	$\boxed{1.0}$	1
0		

Damit gilt  $\boxed{0, \overline{703}_{10} = 0, 201_3}$ . Die Rückrichtung als Probe gemäß Gleichung (8) bestätigt unser Ergebnis. Entsprechend ergeben sich  $\boxed{0, \overline{4}_{10} = 0, 11_3}$  und  $\boxed{0, \overline{7}_{10} = 0, 21_3}$ , wie man direkt nachrechnet:

$z \leftarrow z - [z]$	$3z$	$[3z]$	$z \leftarrow z - [z]$	$3z$	$[3z]$
0. $\overline{4}$	$\boxed{1.\overline{3}}$	1	0. $\overline{7}$	$\boxed{2.\overline{3}}$	2
0. $\overline{3}$	$\boxed{1.0}$	1	0. $\overline{3}$	$\boxed{1.0}$	1
0			0		

Wie im Dezimalsystem gibt es periodische Brüche (mit Periode ungleich  $\overline{0}$ ) auch im Ternärsystem. Beispiele sind  $0, 01\overline{6}_{10} = 0, 0\overline{1}_3$  oder  $0, 3_{10} = 0, 0\overline{220}_3$ :

$z \leftarrow z - [z]$	$3z$	$[3z]$	$z \leftarrow z - [z]$	$3z$	$[3z]$
0. $\overline{16}$	$\boxed{0.5}$	0	0.3	$\boxed{0.9}$	0
0.5	$\boxed{1.5}$	1	0.9	$\boxed{2.7}$	2
0.5	...	...	0.7	$\boxed{2.1}$	2
			0.1	$\boxed{0.3}$	0
			0.3	$\boxed{0.9}$	0
			...	...	...

Jede positive Zahl  $< 1$ , die eine endliche Dezimalbruchentwicklung besitzt, hat eine unendliche Ternärbruchentwicklung, und umgekehrt. Das liegt daran, dass 3 und 10 teilerfremd sind.

## 2.4 Arithmetik im Ternärsystem

Um die Grundrechenarten der Addition und Multiplikation durchzuführen, müssen wir zunächst die Additions- und Multiplikationsregeln für einstellige Ziffern definieren. Wie in jedem Stellenwertsystem ergeben sich daraus die Addition und Multiplikation für allgemeine Zahlen. Am einfachsten stellt man diese Regeln in Form einer Additions- und einer Multiplikationstabelle auf:

+	0	1	2		·	0	1	2	
0	0	1	2		0	0	0	0	
1	1	2	10		1	0	1	2	(9)
2	2	10	11		2	0	2	11	

Hiermit gilt z.B.  $1 + 1 = 2$  oder  $2 + 1 = 10_3$ , mit dem Übertrag 1. Daraus ergeben sich für die Addition und Multiplikation zweier Zahlen die aus der Grundschule bekannten Verfahren. Beispielsweise für  $2020_3 + 2210_3$  und  $2020_3 \cdot 2210_3$ :

	2 0 1 0
+	2 2 1 0
Übertrag	1
1 1 2 2 0	

	2 0 1 0 · 2 2 1 0
	1 1 0 2 0
	1 1 0 2 0
	2 0 1 0 0
Übertrag	1
1 2 2 1 2 1 0 0	

Tatsächlich ist  $11220_3 = 132_{10} = 57_{10} + 75_{10}$  und  $12212100_3 = 4275_{10} = 57_{10} \cdot 75_{10}$ .

### 2.4.1 Subtraktion und Division mit Hilfe des Komplements

Das Dreierkomplement einer ganzen Zahl  $z = a_n \dots a_0$  in Ternärdarstellung ergibt sich, indem jede Ziffer 0 durch 2 und umgekehrt ersetzt und zu der so entstandenen Zahl 1 addiert wird. Beispielsweise ist das Dreierkomplement von  $2210_3$  die Zahl  $0012_3 + 1 = 0020_3$ . Da  $2210_3 + 0020_3 = 1|0000$ , ist das Komplement  $0020$  die Negative von  $2210$ , wenn man sich nur auf die ersten vier Trits zur Darstellung beschränkt.

Zu beachten ist, dass das Komplement (genau wie im Falle der Binärdarstellung) von der Anzahl der Stellen abhängt, mit der die Zahl dargestellt wird. Verwenden wir beispielsweise sieben Trits zur Darstellung, wobei das höchste Trit das Vorzeichen bestimmt (0: +, 2: -), so lautet das Komplement von  $0|002210_3$  nun  $2|220012_3 + 1 = 2|220020_3$ . Es gilt  $0|002210_3 + 2|220020_3 = 2|000000$ . Entsprechend gilt

	0   0 0 2 0 1 0
+	2   2 2 0 0 2 0
Übertrag	1
2   2 2 2 1 0 0	

also  $0|002010_3 - 0|002210_3 = 0|002010_3 + 2|220020_3 = 2|222100_3$ . Da das führende Trit 2 lautet, muss von dieser Zahl das Komplement gebildet werden, um sie vorzeichengerecht zu sehen, also  $0|000122_3 + 1 = 0|000200_3$ : die Differenz lautet also  $002010_3 - 002210_3 = -00200_3$ , oder in Dezimaldarstellung  $57 - 75 = -18$ .

Die Division  $x \div y$  zweier ganzer Zahlen verläuft in der Ternärdarstellung mit fixer Tritanzahl und einem Vorzeichentrit durch den folgenden Algorithmus.

1. Bilde das Komplement  $y^*$  des Divisors  $y$  und setze den Schleifenzähler auf 0.
2. Berechne die Summe  $x + y^*$  des Dividenden und des Komplements des Divisors; ist sie negativ (hat als führendes Trit also eine 2), so gib den (alten) Wert von  $x$  als *Divisionsrest* zurück und beende die Routine, ansonsten speichere  $x \leftarrow x + y^*$  und erhöhe den Schleifenzähler um 1.

Die Anzahl der durchgeführten Schleifendurchläufe ist das Ergebnis der Division. Das Ergebnis der vorletzten Addition ist der *Divisionsrest*. Beispielsweise gilt für  $0|001112_3 \div$

$0|000021_3$ :

		0001112	
+		2222202	
	1	0001021	
+		2222202	
	1	0001000	
+		2222202	
	1	0000202	
+		2222202	(10)
	1	0000111	
+		2222202	
	1	0000020	←
+		2222202	
		2222222	
	$\Sigma$	$5 = 21_3$	

Das Ergebnis ist also  $0|001112_3 \div 0|000021_3 = 0|0000012_3$  Rest  $0|000020$ , oder in Dezimaldarstellung  $41 \div 7 = 5$  Rest 6. Die Division kann auch durchgeführt werden wie die übliche schriftliche Division. Beispielsweise gilt

$$\begin{array}{r}
 1112_3 \div 21_3 = 12_3 \text{ Rest } 20_3 \\
 \underline{- 21} \\
 202 \\
 \underline{- 112} \\
 20
 \end{array}
 \tag{11}$$

Man beachte, dass mit unserer Definition des Komplements die Informationskapazität des führenden Trits, also des Vorzeichenrits, nicht optimal ausgenutzt wird, denn es werden effektiv nur zwei Werte (0 und 2) angenommen. Eine effizientere Darstellung, die ohne ein Vorzeichenrit auskommt, ist das „balanzierte Ternärsystem“.

### 3 Das balanzierte Ternärsystem

Das *balanzierte Ternärsystem*<sup>1</sup> ist ein Zahlssystem, das nicht auf den drei Werten 0, 1, 2 beruht, sondern auf  $-1, 0, 1$ . Zur Unterscheidung werden wir das obige Ternärsystem auch *gewöhnliches Ternärsystem* nennen. Der erste, der das balanzierte Ternärsystem verwendete, war vermutlich der englische Mathematiker John Colson (1680–1760), und zwar unter der Bezeichnung *negativo-affirmative arithmetic* [L2]. Die erste „reine“ balanzierte Ternärnotation veröffentlichte 1840 der französische Mathematiker und Ingenieur Léon-Louis Lalanne (1811–1892), vgl. [4, S. 208].

Da man ein einzelnes Symbol für  $-1$  benötigt, um ein Stellenwertsystem mit diesen drei Werten zu erhalten, gibt es verschiedene Konventionen. So werden oft die Bezeichnungen  $(-, 0, +)$ ,  $(\downarrow, 0, \uparrow)$ ,  $(\bar{1}, 0, 1)$  [4, S. 207] oder  $(q, o, p)$  [5, Anm. 71] verwendet. Im

<sup>1</sup> Die Schreibweise im Deutschen ist nicht einheitlich: Da das Wort von dem Verb „balancieren“ abgeleitet ist, findet man meist die Schreibweise „balanciertes Ternärsystem“. Wir halten uns hier an die in der mathematischen Literatur nicht unübliche Schreibweise [6].



Folgendes wird hier die Notation

$$(-1, 0, 1) \leftrightarrow (\downarrow, 0, \uparrow) \quad (12)$$

benutzt. Der Ziffernvorrat besteht also aus den drei Ziffern  $\{\downarrow, 0, \uparrow\}$ , und jede reelle Zahl  $z$  lässt sich in eine eindeutige Reihe

$$z = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot 3^k \quad \text{mit } a_k \in \{\downarrow, 0, \uparrow\}. \quad (13)$$

entwickeln. Bemerkenswert ist, dass wir kein Vorzeichen benötigen. Eine Zahl ist positiv, wenn ihr höchstes Trit  $\uparrow$  ist, und negativ, wenn es  $\downarrow$  ist.

### 3.1 Umrechnung von balanzierter Ternär- in Dezimaldarstellung

Die Umrechnung von der balanzierten Ternärdarstellung ins Dezimalsystem geschieht genau wie im Standardfall, unter Beachtung der Tatsache, dass  $a_k = \downarrow = -1$ . Für  $\uparrow \downarrow 0 \uparrow 0$  gilt z. B.

$$\begin{array}{r|cccccc}
 & 1 & \downarrow & 0 & \uparrow & 0 & \\
 + & & 3 & 6 & 18 & 57 & \\
 \hline
 & 1 & 2 & 6 & 19 & 57 & 
 \end{array} \quad (14)$$

vgl. Gleichung (5). Entsprechend ist  $\uparrow 0 \downarrow \uparrow 0 = 75_{10}$ .

### 3.2 Umrechnung von Dezimal- in balanzierte Ternärdarstellung

Die Umrechnung einer Zahl von ihrer Dezimaldarstellung in ihre balanzierte Ternärdarstellung geschieht nicht so direkt wie im gewöhnlichen Ternärsystem. Wir benötigen zwei Spezialfunktionen  $\text{div3b}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  und  $\text{mod3b}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \{\downarrow, 0, \uparrow\}$ , die die ganzzahlige Division und Modularechnung im Ternärsystem („3b“) liefern:

$$\text{div3b}(z) = \begin{cases} z/3 + 1, & \text{wenn } z \% 3 = 2, \\ z/3 & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{mod3b}(z) = \begin{cases} \uparrow, & \text{wenn } z \% 3 = 1, \\ 0, & \text{wenn } z \% 3 = 0, \\ \downarrow, & \text{wenn } z \% 3 = 2. \end{cases} \quad (15)$$

Zur Umrechnung erstellt man nun eine Tabelle mit den Spalten

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 z & z \% 3 & \text{div3b}(z) & \text{mod3b}(z) \\
 \hline
 & & & 
 \end{array} \quad (16)$$

und trägt nun, ähnlich wie im Standardfall, jeweils zeilenweise die Werte für  $z$  ein, beginnend mit der umzurechnenden Zahl in der ersten Zeile, dann weiter mit dem Wert aus der dritten Spalte für das nächste  $z$ , solange bis dieser Wert 0 ist. Beispielfhaft sei

das durchgeführt für  $z = 57_{10}$ :

$z$	$z \% 3$	$\text{div}_{3b}(z)$	$\text{mod}_{3b}(z)$
57	0	19	0
19	1	6	1
6	0	2	0
2	2	1	↓
1	0	0	1

(17)

Also ist  $57_{10} = \overline{1} \overline{0} \overline{1} 0$ .

### 3.3 Umrechnung zwischen gewöhnlicher und balanzierter Ternär-darstellung

Die Umrechnung von der gewöhnlichen in die balanzierte Ternärdarstellung geht nach der Vorschrift: Addiere  $111\dots$  zur gewöhnlichen Ternärdarstellung nach dessen Additionsregeln, wobei die Anzahl der Einsen größer als die Tritanzahl der umzuwandelnden Zahl ist; subtrahiere von dieser Zahl  $111\dots$  stellenweise ohne Übertrag nach den Regeln

$$2 - 1 = \overline{1}, \quad 1 - 1 = 0, \quad 0 - 1 = \downarrow. \quad (18)$$

Die Umrechnung von der balanzierten in die gewöhnliche Ternärdarstellung verläuft entsprechend umgekehrt. Beispielsweise ist  $2010_3 + 11111_3 = 20121_3$ ,  $20121_3 - 11111 = \overline{1} \overline{0} \overline{1} 0$ , also  $2010_3 = \overline{1} \overline{0} \overline{1} 0 = 57$ . Umgekehrt liefert  $\overline{1} \overline{0} \overline{1} 0 + 111111 = 120121$ , und dann  $120121_3 - 111111_3 = 002010_3$ .

### 3.4 Balanzierte Ternärbrüche

Zunächst beobachten wir, dass ein balanzierter Ternärbruch mit Gleichung (13) ins Dezimalsystem umgerechnet werden kann, wobei für einen periodischen Bruch die geometrische Reihe verwendet werden kann. So gilt beispielsweise

$$\overline{1, \downarrow 0 \overline{1}} = 3^0 - \frac{1}{3} + \frac{1}{27} = \frac{19}{27} = 0,\overline{703}. \quad (19)$$

oder für periodische Ternärbrüche

$$\overline{1, \overline{0 \downarrow}} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2k}} = 2 - \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = 2 - \frac{9}{8} = 1\frac{7}{8} = 1,875. \quad (20)$$

und

$$\overline{0, \overline{1 \downarrow 0 \downarrow 0}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{4k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{4k+3}} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3^3}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3^4)^k} = \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{81}} = \frac{8}{27} \cdot \frac{81}{80} = 0,3. \quad (21)$$

Leider scheint es kein einfaches Verfahren zu geben, mit der man einen Dezimalbruch direkt ins balanzierte Ternärsystem umrechnet. Der wohl einfachste Weg führt über das

gewöhnliche Ternärsystem: Zunächst wandelt man die Dezimal- in die gewöhnliche Ternärdarstellung, addiert dann die Zahl

$$\dots 111, 111 \dots_3$$

mit größerer Anzahl Einsen hinzu und zieht am Ende  $\dots 111, 111 \dots$  nach den Regeln (18) ab. Beispielsweise ergibt das für  $0, \overline{703}$  zunächst  $0, 201_3$ , addiert mit  $11, 111_3$  dann  $12, 012$ , und abzüglich  $11, 111$  mit (18) schließlich  $\downarrow, \downarrow 0 \downarrow$ .

Aufpassen muss man bei der Umrechnung von periodischen Ternärbrüchen, denn die Addition mit  $\dots 11, 11 \dots$  kann zu Überträgen führen. Pragmatisch kann man das Problem umgehen, indem man die Periode zweimal aufschreibt, die Umrechnenprozedur durchführt und die Ziffernfolge der Periodenlänge im balanzierten System als Periode übernimmt. Beispielsweise schreibt man  $\frac{7}{8} = 0, \overline{21}_3$  als  $0, 2121_3$ , was  $0, 2121_3 + 11, 1111_3 = 12, 1002_3$  liefert, und dann  $12, 1002 - 11, 1111 = \downarrow, 0 \downarrow \downarrow$ , also

$$0, \overline{21}_3 = \downarrow, \overline{0 \downarrow}. \quad (22)$$

Ebenso verfährt man mit  $0, \overline{0220}_3$ , also  $0, 02200220_3 + 11, 11111111 = 11, 21012101 \rightarrow 11, 21012101 - 11, 11111111 = 0, \downarrow 0 \downarrow 0 \downarrow 0$ , also

$$0, \overline{0220}_3 = 0, \overline{\downarrow 0 \downarrow 0}. \quad (23)$$

### 3.5 Arithmetik im balanzierten Ternärsystem

Die Additions- und Multiplikationsregeln basieren auf den folgenden Regeln für einstellige Operationen:

$$\begin{array}{c|ccc} + & \downarrow & 0 & 1 \\ \downarrow & \downarrow \downarrow & \downarrow & 0 \\ 0 & \downarrow & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \downarrow \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \cdot & \downarrow & 0 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & 1 & 0 \downarrow \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \downarrow & 0 & 1 \end{array} \quad (24)$$

Interessanterweise ist also  $\downarrow + \downarrow = \downarrow \downarrow$ , und  $1 + 1 = \downarrow \downarrow$ , also  $\downarrow \downarrow = -1 \downarrow < 0$ . Ferner fällt auf, dass die Addition nur noch zwei Fälle mit Übertrag hat, anstatt drei wie im gewöhnlichen Ternärsystem, und die Multiplikation sogar überhaupt keinen, anstatt einen wie im gewöhnlichen Ternärsystem.

Aus den Additions- und Multiplikationstabellen ergeben sich die Verfahren für die Addition und Multiplikation zweier Zahlen. Beispielsweise für  $\downarrow \downarrow 0 \downarrow 0 + \downarrow 0 \downarrow \downarrow 0$  und  $\downarrow \downarrow 0 \downarrow 0 \cdot \downarrow 0 \downarrow \downarrow 0$ :

$$\begin{array}{r|l} + & \downarrow \downarrow 0 \downarrow 0 \\ & \downarrow 0 \downarrow \downarrow 0 \\ \hline \text{Übertrag} & \downarrow \\ \hline & \downarrow \downarrow \downarrow 0 \downarrow 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} & \downarrow \downarrow 0 \downarrow 0 \cdot \downarrow 0 \downarrow \downarrow 0 \\ & \downarrow \downarrow 0 \downarrow 0 \downarrow 0 \\ & \downarrow \downarrow 0 \downarrow 0 \\ & \downarrow \downarrow 0 \downarrow 0 \downarrow 0 \\ \hline \text{Übertrag} & \downarrow \\ \hline & \downarrow \downarrow 0 0 \downarrow \downarrow \downarrow 0 \downarrow 0 \end{array} \quad (25)$$

Tatsächlich ist  $\downarrow \downarrow \downarrow 0 \downarrow 0 = 132_{10} = 57_{10} + 75_{10}$  und  $\downarrow \downarrow 0 0 \downarrow \downarrow \downarrow 0 \downarrow 0 = 4275_{10} = 57_{10} \cdot 75_{10}$ .

Das Komplement in der balanzierten Ternärdarstellung ergibt sich, indem man 1 durch ↓ ersetzt und umgekehrt. Beispielsweise lautet das Komplement von 10↓10 einfach ↓0↑↑0. Nach den gleichen Regeln wie im Standard-Ternärsystem kann man mit dem Komplement die Subtraktion und die ganzzahlige Division durchführen. Beispielsweise lauten  $↑↑0↑0 - 10↓↑0 = ↑↑0↑0 + ↓0↑↑0$ , oder  $↑↑↑↑↑ ÷ ↑↑↑$ :

	1 ↓ 0 1 0
+	↓ 0 ↑ ↑ 0
Übertrag	
	↓ 1 0 0

+		↑↑↑↑↑
	1	↑↑↑↑
+		↑↑↑
	1	↑000
+		↑↑↑
	1	↑↑↑↑
+		↑↑↑
	1	↑↑↑
+		↑↑↑
	1	↑↑0 ←
+		↑↑↑
+		↓
Σ	5 =	↑↑↑

(26)

In der Tat ist  $↓↑00 = -18 = 57 - 75$  und  $↑↑↑↑↑ ÷ ↑↑↑ = ↑↑↑ \text{ Rest } ↑↑0 = 41 ÷ 7$ . Die Division kann auch durchgeführt werden wie die übliche schriftliche Division, allerdings mit der Sonderregel, dass ein negativer Dividend nicht als Rest bleiben darf. Beispielsweise gilt

$$\begin{array}{r}
 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \div \uparrow\uparrow\uparrow = \uparrow\uparrow\uparrow \text{ Rest } \uparrow\uparrow 0 \\
 -\uparrow\uparrow\uparrow \\
 \hline
 \uparrow\uparrow\uparrow \\
 -\uparrow\uparrow\uparrow \\
 \hline
 0\uparrow \\
 -\uparrow\uparrow\uparrow \\
 \hline
 \uparrow\uparrow 0
 \end{array}
 \tag{27}$$

Durch die Sonderregel wird der Algorithmus also nicht wie gewohnt bei der Stelle 0↓ beendet, sondern erst einen Schritt später. (Ohne die Sonderregel wäre das Ergebnis  $↑↑0 \text{ Rest } ↓$ , also 6 Rest -1, was mathematisch ebenfalls korrekt ist.)

### 3.6 Teilbarkeitsregeln

Ähnlich wie im Dezimalsystem gibt es einige einfache Teilbarkeitsregeln für ganze Zahlen im Ternärsystem:

- *Teilbarkeit durch 3*: Eine ganze Zahl im (gewöhnlichen wie auch balanzierten) Ternärsystem ist genau dann durch 3 teilbar, wenn sie mit einer 0 endet. Beispiel:  $↑↑0↑0 = 57$ .
- *Teilbarkeit durch  $3^n$* : Eine ganze Zahl im (gewöhnlichen wie auch balanzierten) Ternärsystem ist genau dann durch  $3^n$  teilbar,  $n \in \mathbb{N}$ , wenn sie mit  $n$  Nullen endet. Beispiel:  $↑↑00 = 18$  ist durch  $3^2 = 9$  teilbar.

- *Teilbarkeit durch 2*: Eine ganze Zahl im balanzierten Ternärsystem ist genau dann durch 2 teilbar, wenn die Quersumme der Quersumme der Quersumme ... ihrer Ziffern 0 ergibt. Beispiel:  $10\downarrow 11 = 76$  ist gerade, denn die Quersumme lautet  $1 + 0 + \downarrow + 1 + 1 = 1\downarrow$ , deren Quersumme wiederum  $1 + \downarrow = 0$ .

## 3.7 Anwendungen

### 3.7.1 Optimale Standardgewichte für eine Balkenwaage

Das Bachet'sche<sup>2</sup> Problem der Gewichte ist durch die folgende Frage gegeben [L1] „Was ist der kleinste Satz an Standardgewichten einer Balkenwaage, so dass alle ganzzahligen Gewichte von 1 bis 40 Gramm gewogen werden können?“

Die Antwort ist: Es ist ein Satz aus den vier Wägestücken  $1 = 1$ ,  $10 = 3$ ,  $100 = 9$  und  $1000 = 27$  Gramm. Wie kann das funktionieren? Jede Zahl von 1 bis 40 lässt sich mit maximal vier Ziffern des balanzierten Ternärsystems darstellen, also beispielsweise  $14 = 1\downarrow\downarrow\downarrow$ . Leitet man daraus die Vorschrift ab, dass das der Position entsprechende Standardgewicht auf die Waagschale des zu messenden Gegenstands gelegt wird, wenn der Wert  $\downarrow$  ist, auf das gegenüber liegende bei dem Wert  $1$ , und gar nicht verwendet wird bei dem Wert  $0$ , so kann man jedes ganzzahlige Gewicht mit diesen vier Standardgewichten messen. Bei der Konstellation  $1\downarrow\downarrow\downarrow$  bedeutet das also, dass das 27-Gramm-Gewicht auf der dem Gegenstand gegenüber liegenden Schale liegt, die andern drei auf der anderen. Das größtmögliche zu wiegende Gewicht ist dann  $1111 = 1 + 3 + 9 + 27 = 40$  Gramm.

### 3.7.2 Dreiwertige Logik

Eine *dreiwertige Logik* ist ein Beispiel für eine Logik, die sich von der klassischen Logik dadurch unterscheidet, dass es mehr als zwei Wahrheitswerte gibt. Die historisch erste dreiwertige Logik  $\mathcal{L}_3$  wurde von Łukasiewicz<sup>3</sup> 1920 eingeführt. Sie wird heute der „intuitionistischen Logik“ zugerechnet und kann als eine spezielle Fuzzy-Logik angesehen werden [L4].

Neben den Wahrheitswerten  $w$  und  $f$  der klassischen Logik wird in einer dreiwertigen Logik ein dritter Wahrheitswert eingeführt. Bei Łukasiewicz, der von einer erkenntnistheoretischen Fragestellung ausging, ist die beabsichtigte Bedeutung in etwa: „nicht bewiesen, aber auch nicht widerlegt“, und kann als  $m$  („möglich“) gelesen werden. Interpretationen, die  $\mathcal{L}_3$  in der Informatik anwenden, lesen den dritten Wahrheitswert als  $u$  für „unbekannt“. Für die logischen Junktoren  $\wedge$  („und“) und  $\vee$  („oder“) gelten dann die folgende Wahrheitstabellen:

$$\begin{array}{c|ccc} \wedge & f & u & w \\ \hline f & f & f & f \\ u & f & u & u \\ w & f & u & w \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \vee & f & u & w \\ \hline f & f & u & w \\ u & u & u & w \\ w & w & w & w \end{array} \tag{28}$$

Es gibt zwei verschiedene Negationen, die *starke Negation*  $\neg$  und die *schwache Negati-*

<sup>2</sup>Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1581–1638), französischer Mathematiker

<sup>3</sup>Jan Łukasiewicz (1878–1956), polnischer Mathematiker und Logiker; Erfinder der „Polnischen Notation“

on  $\sim$ , definiert durch die Vorschriften

$$\begin{array}{c|c} x & \neg x \\ \hline f & w \\ u & u \\ w & f \end{array} \quad \begin{array}{c|c} x & \sim x \\ \hline f & w \\ u & w \\ w & f \end{array} \tag{29}$$

Üblicherweise werden für die Wahrheitswerte die Zahlwerte 0 (für f), 1 (für w) und 1/2 (für u bzw. u) verwendet. Ersetzen wir jedoch

$$(f, u, w) \leftrightarrow (\downarrow, 0, \uparrow), \tag{30}$$

so ergeben die obigen Wahrheits- und Negationstabellen

$$\begin{array}{c|c|c|c} \wedge & \downarrow & 0 & \uparrow \\ \hline \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & \downarrow & 0 & 0 \\ \uparrow & \downarrow & 0 & \uparrow \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c|c} \vee & \downarrow & 0 & \uparrow \\ \hline \downarrow & \downarrow & 0 & \uparrow \\ 0 & 0 & 0 & \uparrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array} \quad \begin{array}{c|c} x & \neg x \\ \hline \downarrow & \uparrow \\ 0 & 0 \\ \uparrow & \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{c|c} x & \sim x \\ \hline \downarrow & \uparrow \\ 0 & \uparrow \\ \uparrow & \downarrow \end{array} \tag{31}$$

Wir können also logische Operationen durch numerische Rechenoperationen ausdrücken:

$$x \wedge y = \min(x, y), \quad x \vee y = \max(x, y), \quad \neg x = -x, \quad \sim x = \uparrow - x - x^2. \tag{32}$$

### 3.8 Vorteile des balanzierten Ternärsystems

Das balanzierte Ternärsystem hat einige Vorteile gegenüber anderen Stellenwertsystemen, insbesondere dem in Computern verwendeten Binärsystem.

- *Vorzeichenlosigkeit*: Das Ternärsystem benötigt zur Unterscheidung von positiven und negativen Zahlen kein Vorzeichen. Das Vorzeichen einer Zahl wird einfach durch den Wert ihres höchstwertigen Trits bestimmt: ist es  $\uparrow$ , so ist sie positiv, ist es  $\downarrow$ , so ist sie negativ. Dadurch wird ein Vergleich zweier Zahlen im balanzierten Ternärsystem einfach ein lexikographischer Vergleich der Ziffern von links nach rechts, wie bei einem Text.
- *Einfache Subtraktion*. Als eine der Konsequenzen der Vorzeichenlosigkeit wird das balanzierte Dreierkomplement einfach durch Austauschen der Ziffern  $\uparrow$  durch  $\downarrow$  und umgekehrt gebildet. Damit ist die Subtraktion sehr leicht durchführbar und deutlich einfacher als im binären oder dekadischen System [5, S. 181f].
- *Optimale Anzahl an Überträgen*: Gemäß den Tabellen (24) liefert die einstellige Multiplikation wie im Binärsystem keinen Übertrag, die Addition nur zwei dual symmetrische (für  $\downarrow + \downarrow = \downarrow\uparrow$  und  $\uparrow + \uparrow = \uparrow\downarrow$ ).
- *Einfache Rundung*: Das Runden zur nächsten ganzen Zahl ist im balanzierten Ternärsystem identisch mit dem Abschneiden der Nachkommastellen. Zum Beweis betrachten wir die Entwicklungen  $x = 0, \uparrow \dots$  und  $y = 0, \downarrow \dots$ , wobei „ $\dots$ “ eine beliebige Folge von Ziffern  $\in \{\downarrow, 0, \uparrow\}$  darstellt, jedoch nicht die periodischen Ternärbrüche  $\bar{\uparrow}$  ( $= \frac{1}{2}$ ) oder  $\bar{\downarrow}$  ( $= -\frac{1}{2}$ ). Dann folgt  $x < \frac{1}{2}$  und  $y > -\frac{1}{2}$ , also Abschneiden = Runden.

- *Technische Implementierbarkeit:* Das balanzierte Ternärsystem kann ganz natürlich durch elektrische Signale implementiert werden, denn ein elektrisches Potential kann entweder negativ, neutral oder positiv sein. Bereits heute wird in der Nachrichtentechnik zur Datenübertragung über elektrische Kabel mit dem dreiwertigen Codierverfahren MLT-3 (*Multilevel Transmission Encoding - 3 levels*) (im Fast Ethernet Standard 100-Base-TX) gearbeitet, das ternäre Signale mit drei Spannungspegeln  $(-, 0, +)$  verarbeitet (... wenn auch nur zur Codierung *binärer* Signale [2, S. 94]). In den 1950er Jahren wurde an der Staatsuniversität Moskau unter der Leitung des bedeutenden Mathematikers S. L. Sobolew (1908–1989) sogar ein Computer namens *Setun* [L3] gebaut, der auf dem balanzierten Ternärsystem basierte. Der Rechner wurde nach dem Bach Setun nahe der Universität benannt.
- *Ökonomischstes Zahlssystem:* Mathematisch ist jede natürliche Zahl als Basis (engl. *radix*) für ein Zahlssystem geeignet. Je kleiner allerdings die Basis ist, desto mehr Stellen werden für eine gegebene Zahl benötigt, und je größer sie ist, desto mehr Symbole werden für ihren Zeichenvorrat gebraucht. Nimmt man als Kennzahl für die „ökonomischen Kosten“ eines Zahlsystems das Produkt  $c_w(b) = bw$  der Anzahl  $b$  seiner Ziffern mit der festen „Länge“  $w =$  Anzahl Stellen einer Zahl, so kann man die Kosten  $c_w(b)$  durch Variation der Basis  $b$  minimieren unter der Nebenbedingung  $b^w = \text{const}$ . Diese Nebenbedingung bewirkt, dass der Wertebereich  $b^w$ , also die Anzahl aller darstellbaren Zahlen der Länge  $w$  für alle betrachteten Basen gleich bleibt. Nimmt man behelfsweise an, dass  $b, w \in [1, \infty)$  sich stetig verändern können, so erhält man die minimalen Kosten für  $b_* = e \approx 2,71828$ , die Eulersche Zahl [3]. Da nun 3 die zu  $e$  nächste ganze Zahl ist, sind das gewöhnliche und das balanzierte Ternärsystem die unter diesem Kostenbegriff ökonomischsten Zahlssysteme. Berücksichtigt man außerdem die technische Implementierbarkeit, so ist wegen der einfacheren Subtraktion infolge der Einsparung eines Vorzeichens so ist das balanzierte Ternärsystem das effizienteste Zahlssystem überhaupt.

## 4 Diskussion

Wir haben in diesem Aufsatz einen Überblick über das gewöhnliche und das balanzierte Ternärsystem und deren wichtigsten Eigenschaften gewonnen. Es wurde gezeigt, dass das balanzierte Ternärsystem die effizienteste Zahldarstellung in der Mathematik ist. Wie so manches Mal in der Geschichte hat sich jedoch auch hier nicht die beste der möglichen Lösungen durchgesetzt, sondern diejenige, die als erste bekannt war: im alltäglichen Bereich das von indischen Mathematikern im siebten Jahrhundert entwickelte Dezimalsystem und im technischen Bereich das durch Leibniz<sup>4</sup> 1703 eingeführte Binärsystem [1]. Trefflicher als es der Wiener Mathematiker Rudolf Taschner formuliert hat, kann dieser Aufsatz nicht enden:

„Man kann über die Chancen der Durchsetzbarkeit des [balanzierten] triadischen Systems wegen seiner unbezweifelbaren Vorteile gegenüber dem dekadischen System spekulieren, wenn es Leibniz entdeckt [...] hätte. [...] Sicher hätte das triadische Sys-

<sup>4</sup> Gottfried Wilhelm Leibniz (1703): „Explication de l’Arithmétique Binaire“, *Histoire de l’Academie Royale des Sciences* 1703, veröffentlicht in Paris 1705

tem Generationen von Schülerinnen und Schülern myriadenfach begangene Vorzeichenfehler erspart, die wohl lästigsten Stolpersteine des Mathematikunterrichts, die so manchem jungen Menschen das Rechnen zur Qual machen. Die Geschichte hat anders entschieden. Mehr als 300 Jahre nach Leibniz ist es leider aussichtslos, wollte man mit dem triadischen System gegen das über Jahrhunderte tradierte dekadische System ankämpfen.“ [5, S. 182]

## Literatur

- [1] DE VRIES, Andreas: *Der lange Weg der Zahlen. Eine kurze Geschichte des Dezimalsystems*. Norderstedt : Books On Demand, 2011
- [2] HÄCKELMANN, Heiko ; PETZOLD, Hans J. ; STRAHRINGER, Susanne: *Kommunikationssysteme. Technik und Anwendungen*. Heidelberg Berlin : Springer-Verlag, 2000
- [3] HAYES, Brian: ‘Third Base’. In: *Scientific American* 89 (2001), Nr. 6, S. 490–494. – doi: 10.1511/2001.6.490
- [4] KNUTH, Donald E.: *The Art of Computer Programming. Volume 2: Seminumerical Algorithms*. 3rd Edition. Reading : Addison-Wesley, 1998
- [5] TASCHNER, Rudolph: *Der Zahlen gigantische Schatten. Mathematik im Zeichen der Zeit*. 3. Aufl. Wiesbaden : Vieweg Verlag, 2005
- [6] TREITZ, Norbert: ‘Geometrische Folgen und Pseudo-Einheiten’. In: *Spektrum der Wissenschaft* 6 (2008), S. 42–45. – <http://www.spektrum.de/artikel/951094>

## Web-Links

- [L1] <http://www.abhijit.info/tristate/tristate.html> – Kurze Einführung und Überblick über das balanzierte Ternärsystem von A. Bhattacharjee [zuletzt besucht am 2.11.2008]
- [L2] <http://www.lucasianchair.org/18/colson.html> – Informationen zu John Colson von lucasianChair.org [zuletzt besucht am 13.10.2011]
- [L3] <http://www.computer-museum.ru/english/setun.htm> – Beschreibung des auf dem Ternärsystem basierenden Rechners *Setun* [zuletzt besucht am 13.10.2011]
- [L4] <http://aps.arxiv.org/abs/0707.2161> – *Algebraic hierarchy of logics unifying fuzzy logic and quantum logic* Vorlesungsskript über verschiedene Logiken [zuletzt besucht am 13.10.2011]